



ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



*Избранные главы*  
**ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**  
*для инженеров и студентов вузов*

М.А.АКИВИС, В.В.ГОЛЬДБЕРГ

**ТЕНЗОРНОЕ  
ИСЧИСЛЕНИЕ**



ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ  
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

---

М. А. АКВИС, В. В. ГОЛЬДБЕРГ

# ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1969

517.3

А 39

УДК 512.972

**Тензорное исчисление.** Акивис М. А., Гольдберг В. В., Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1969 г.

Излагаются основы тензорного исчисления и некоторые его приложения к геометрии, механике и физике. В качестве приложений строится общая теория поверхностей второго порядка, изучаются тензоры инерции, напряжений, деформаций и рассматриваются некоторые вопросы кристаллофизики. Последняя глава знакомит с элементами тензорного анализа.

Табл. 1, рис. 25, библи. — 21 назв.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава I. Линейное пространство . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1. Понятие линейного пространства . . . . .	7
§ 2. Линейная зависимость векторов . . . . .	10
§ 3. Размерность и базис линейного пространства . . . . .	14
§ 4. Прямоугольный базис в трехмерном пространстве. Скалярное произведение векторов . . . . .	19
§ 5. Векторное и смешанное произведения векторов . . . . .	25
§ 6. Преобразования ортонормированного базиса. Основная задача тензорного исчисления . . . . .	32
§ 7. Некоторые вопросы аналитической геометрии в пространстве . . . . .	41
<b>Глава II. Полилинейные формы и тензоры . . . . .</b>	<b>51</b>
§ 1. Линейные формы . . . . .	51
§ 2. Билинейные формы . . . . .	54
§ 3. Полилинейные формы. Общее определение тензора . . . . .	58
§ 4. Алгебраические операции над тензорами . . . . .	65
§ 5. Симметричные и антисимметричные тензоры . . . . .	71
<b>Глава III. Линейные преобразования векторного пространства и тензоры второй валентности . . . . .</b>	<b>83</b>
§ 1. Линейные преобразования . . . . .	83
§ 2. Матрица линейного преобразования . . . . .	88
§ 3. Определитель матрицы линейного преобразования. Ранг матрицы . . . . .	95
§ 4. Линейные преобразования и билинейные формы . . . . .	100
§ 5. Умножение линейных преобразований и умножение матриц . . . . .	111
§ 6. Обратное линейное преобразование и обратная матрица . . . . .	119
§ 7. Группа линейных преобразований и ее подгруппы . . . . .	124
<b>Глава IV. Приведение к простейшему виду матрицы линейного преобразования . . . . .</b>	<b>134</b>
§ 1. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования . . . . .	134



§ 2. Приведение к простейшему виду матрицы линейного преобразования в случае различных собственных значений . . . . .	145
§ 3. Многочлены от матриц и теорема Гамильтона—Кэли . . . . .	150
§ 4. Свойства собственных векторов и собственных значений симметричного линейного преобразования . . . . .	154
§ 5. Приведение к диагональному виду матрицы симметричного линейного преобразования . . . . .	157
§ 6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду . . . . .	165
§ 7. Представление невырожденного линейного преобразования в виде произведения симметричного и ортогонального преобразований . . . . .	170
<b>Глава V. Общая теория поверхностей второго порядка . . . . .</b>	<b>177</b>
§ 1. Общее уравнение поверхности второго порядка. Его инварианты . . . . .	177
§ 2. Приведение к простейшему виду общего уравнения поверхности второго порядка . . . . .	181
§ 3. Определение типа поверхности второго порядка при помощи инвариантов . . . . .	186
§ 4. Классификация поверхностей второго порядка . . . . .	191
§ 5. Приложение теории инвариантов к классификации поверхностей второго порядка . . . . .	196
§ 6. Центральные и нецентральные поверхности второго порядка . . . . .	201
§ 7. Примеры . . . . .	204
<b>Глава VI. Приложение тензорного исчисления к некоторым вопросам механики и физики . . . . .</b>	<b>214</b>
§ 1. Тензор инерции . . . . .	214
§ 2. Некоторые свойства кристаллов, связанные с тензорами второй валентности . . . . .	223
§ 3. Тензоры напряжений и деформации . . . . .	234
§ 4. Дальнейшие свойства кристаллов . . . . .	248
<b>Глава VII. Основы тензорного анализа . . . . .</b>	<b>262</b>
§ 1. Тензорное поле и его дифференцирование . . . . .	262
§ 2. Механика деформируемой среды . . . . .	278
§ 3. Ортогональные криволинейные системы координат . . . . .	288
§ 4. Подвижной репер ортогональной криволинейной системы координат и тензорные поля . . . . .	297
§ 5. Дифференцирование тензорного поля в криволинейных координатах . . . . .	309
Ответы и указания к решению задач и упражнений . . . . .	323
Литература . . . . .	346
Предметный указатель . . . . .	347

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди читаемых во вузах специальных глав высшей математики в последнее время выделился курс тензорного исчисления, который необходим для изложения основ механики сплошных сред, кристаллографии, некоторых разделов теоретической физики, физики полупроводников и многих других разделов теоретических и технических дисциплин, изучаемых во вузах.

Несмотря на наличие большого числа книг по тензорному исчислению (см., например, книги [9]—[14] в списке рекомендуемой литературы), студенты и аспиранты высших технических учебных заведений, так же как и инженеры, работающие в промышленности, которым необходимы первоначальные сведения по тензорному исчислению, затрудняются в подборе руководства по этому разделу математики. Это объясняется тем, что некоторые из имеющихся руководств рассчитаны на достаточно подготовленного читателя и предполагают знакомство с основами линейной алгебры. Изложение же тензорного исчисления в других книгах оказывается сложным именно из-за отсутствия его связи с линейной алгеброй.

В предлагаемой книге при изложении тензорного исчисления подчеркивается его связь с линейной алгеброй. Необходимые понятия и предложения линейной алгебры вводятся и доказываются в тексте книги в связи с построением аппарата тензорного исчисления и не предполагаются заранее известными читателю.

Для простоты и наглядности все изложение ведется в трехмерном пространстве. При этом используются только ортогональные системы координат. Все введенные в книгу понятия и полученные результаты иллюстрируются большим числом разобранных в тексте примеров. Каждый параграф снабжен упражнениями, назначение которых — подкрепить и углубить излагаемый материал.

В книге рассматриваются приложения тензорного исчисления к некоторым вопросам геометрии, механики и физики. Здесь строится общая теория поверхностей второго порядка, изучаются тензоры инерции, напряжений, деформаций и некоторые вопросы кристаллофизики.

В книге изложены также основы тензорного анализа, который строится сначала в прямоугольных декартовых, а затем—в криволинейных ортогональных системах координат. При этом использован метод подвижного репера, который, как нам кажется, дает возможность наиболее просто ввести абсолютное дифференцирование тензоров и ковариантные производные.

Мы не рассматриваем здесь таких важных вопросов, как приложение тензорного исчисления к дифференциальной геометрии, специальной и общей теории относительности, аналитической механике и т. д. Это связано с тем, что изложение таких вопросов потребовало бы от нас построения тензорного исчисления в многомерном пространстве и введения косоугольных систем координат. А мы сознательно избегаем этого. Однако после знакомства с настоящей книгой читатель без труда сумеет разобраться в литературе, посвященной этим приложениям тензорного исчисления, а также в любой другой литературе, использующей аппарат тензорного исчисления.

Содержание книги несколько выходит за рамки программ, по которым в большинстве технических вузов изучается тензорное исчисление. Но в соответствии с конкретной программой вуза всегда можно выбрать те главы и параграфы, изучение которых будет необходимо.

При изложении материала авторы исходили из того, что читатель знаком только с обычным курсом высшей математики, читаемым во втузах.

В конце книги приводится список литературы, на которую мы ссылаемся в тексте, а также литературы, рекомендуемой для более глубокого изучения отдельных вопросов.

Мы выражаем искреннюю признательность В. В. Лохину, Л. З. Румшискому, М. П. Шаскольской, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд полезных замечаний, В. А. Гаухману и И. Е. Морозовой за тщательное редактирование, Л. В. Гольдштейн и Л. Г. Пикулевой за большую помощь при подготовке рукописи к печати.

*Авторы*

## ГЛАВА I

### ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

#### § 1. Понятие линейного пространства

В курсе аналитической геометрии читатель уже встречался с понятием *свободного вектора* — направленного отрезка, который можно переносить в пространстве параллельно его первоначальному положению. Обычно такие векторы обозначают жирными буквами латинского алфавита:  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ . Для простоты можно считать, что все эти векторы имеют общую начальную точку, которую мы обозначим буквой  $O$  и назовем *началом координат*.

В аналитической геометрии для векторов были определены две операции: а) сложение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , обозначаемое  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ; б) умножение вектора  $\mathbf{x}$  на действительное число  $\lambda$ , обозначаемое  $\lambda \mathbf{x}$ . Совокупность всех векторов пространства является *замкнутой* относительно этих двух операций в том смысле, что при умножении вектора на число снова получается некоторый вектор и при сложении двух векторов — некоторый третий вектор из этой же совокупности.

Сложение векторов и умножение вектора на число обладают следующими свойствами:

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ .
2.  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ .
3. Существует *нулевой* вектор  $\mathbf{0}$  такой, что  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ .
4. Для каждого вектора  $\mathbf{x}$  существует *противоположный* вектор  $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$  такой, что  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ .
5.  $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ .
6.  $\lambda(\mu \mathbf{x}) = (\lambda\mu) \mathbf{x}$ .
7.  $(\lambda + \mu) \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}$ .
8.  $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$ .

Однако не только для совокупности векторов пространства могут быть определены операции сложения и умножения на действительное число, обладающие указанными выше свойствами. Как мы увидим далее, существуют и другие множества элементов, на которых определены аналогичные операции. Такие множества называются *линейными* (или *векторными*) *пространствами*. Будем обозначать их буквой  $L$ . Элементы таких пространств будем также называть *векторами*.

Рассмотрим несколько примеров.

а) Совокупность векторов, лежащих на одной прямой, образует линейное пространство, так как сложение и умножение таких векторов на действительное число приводит нас снова к векторам, лежащим на этой прямой, и свойства 1—8 легко проверяются. Обозначим такое линейное пространство через  $L_1$ . (Смысл нижних индексов выяснится в § 3.)

б) Совокупность векторов, лежащих в одной плоскости, также оказывается замкнутой по отношению к сложению и умножению на действительное число; свойства 1—8 для них выполняются, и поэтому эта совокупность образует линейное пространство, которое мы обозначим через  $L_2$ .

в) Совокупность всех векторов пространства также является линейным пространством. Обозначим его через  $L_3$ .

г) Совокупность векторов, лежащих в плоскости  $XOY$ , начала которых совпадают с началом координат, а концы лежат в первом квадранте, не образует линейного пространства, так как оказывается незамкнутой относительно умножения на число: при  $\lambda < 0$  вектор  $\lambda x$  не принадлежит первому квадранту.

д) Рассмотрим множество, элементом которого является упорядоченная совокупность  $n$  действительных чисел:  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Определим сложение элементов  $x$  и  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  и умножение элемента  $x$  на действительное число  $\lambda$  с помощью равенств

$$\begin{aligned} x + y &= \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\}, \\ \lambda x &= \{\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\}. \end{aligned}$$

Такое множество элементов образует линейное пространство, так как определенные в нем операции сложения и умножения на число обладают, как легко видеть, всеми восемью указанными выше свойствами этих операций. Например, нулевым

вектором в этом пространстве будет вектор  $0 = \{0, 0, \dots, 0\}$ , а вектором  $-x$  — вектор  $\{-x_1, -x_2, \dots, -x_n\}$ . Будем обозначать это пространство через  $L_n$ .

е) Совокупность всех многочленов степени не выше  $n$   $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ , для которых обычным образом определены сложение и умножение на действительное число, как легко проверить, также образует линейное пространство.

ж) Множество непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $\varphi(t)$  также образует линейное пространство, если для этих функций естественным образом определить операции сложения и умножения на число. Это пространство мы будем обозначать  $C[a, b]$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Выяснить, образует ли линейное пространство

а) совокупность всех векторов\*) пространства  $L_2$  (см. пример б)), за исключением векторов, параллельных некоторой заданной прямой;

б) совокупность всех векторов пространства  $L_2$ , концы которых лежат на заданной прямой;

в) совокупность всех векторов пространства  $L_2$  (см. пример в)), концы которых не лежат на данной прямой.

2. Выяснить, образует ли линейное пространство совокупность векторов пространства  $L_n$  (см. пример д)), для которых

а)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ ;

б)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ;

в)  $x_1 = x_3$ ;

г)  $x_2 = x_4 = \dots$ ;

д) первая компонента — целое число;

е)  $x_1$  или  $x_2$  равен нулю;

3. Образует ли линейное пространство совокупность многочленов, степень которых равна  $n$  (ср. с примером е))?

4. Пусть  $R^+$  — совокупность положительных действительных чисел. Под «с л о ж е н и е м» двух чисел будем понимать их обычное умножение, а под «у м н о ж е н и е м» элемента  $p \in R^+$ \*\*) на действительное число  $\lambda$  будем понимать обычное возведение числа  $p$  в степень  $\lambda$ . Образует ли множество  $R^+$  с таким образом введенными на нем операциями линейное пространство? Чему равен «противоположный» элемент для  $p \in R^+$ ? Какой элемент служит «нулем» этого пространства?

---

\*) Напомним, что в начале параграфа мы условились считать все векторы выходящими из начала координат.

\*\*) Знак  $\in$ , как обычно, означает принадлежность элемента  $p$  множеству  $R^+$ .



5. Доказать, что совокупность решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

образует линейное пространство.

*Линейным подпространством* линейного пространства называется непустое (т. е. содержащее хотя бы один вектор) подмножество  $L'$  векторов из  $L$ , которые сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в  $L$  операций сложения и умножения на число, т. е. такое подмножество  $L'$ , для которого из того, что  $x \in L'$ ,  $y \in L'$ , следует, что  $x + y \in L'$ ,  $\lambda x \in L'$ . Простейшими подпространствами пространства  $L$  являются подпространство, состоящее из одного нулевого элемента (нулевое подпространство), и все пространство  $L$ . Эти подпространства называются *несобственными*.

*Суммой* двух линейных подпространств  $L'$  и  $L''$  линейного пространства  $L$  называется совокупность  $M = L' + L''$  всех векторов из  $L$ , каждый из которых представляется в виде  $x = x' + x''$ , где  $x' \in L'$ ,  $x'' \in L''$ .

*Пересечением* двух линейных подпространств  $L'$  и  $L''$  линейного пространства  $L$  называется совокупность  $N = L' \cap L''$  всех векторов из  $L$ , каждый из которых принадлежит как  $L'$ , так и  $L''$ .

6. Доказать, что сумма и пересечение двух линейных подпространств линейного пространства  $L$  сами являются линейными подпространствами  $L$ .

7. Перечислить все типы подпространств пространства  $L_n$ .

8. Какие из совокупностей векторов задачи 2 образуют подпространства  $L_n$ ?

## § 2. Линейная зависимость векторов

1. Пусть  $a, b, \dots, e$  — векторы линейного векторного пространства  $L$  и  $\alpha, \beta, \dots, \epsilon$  — действительные числа. Вектор

$$x = \alpha a + \beta b + \dots + \epsilon e$$

называется *линейной комбинацией* векторов  $a, b, \dots, e$ , а числа  $\alpha, \beta, \dots, \epsilon$  — коэффициентами этой линейной комбинации.

Если  $\alpha = \beta = \dots = \epsilon = 0$ , то  $x = 0$ . Но может быть и так, что существует линейная комбинация векторов  $a, b, \dots, e$ , у которой не все коэффициенты равны нулю, но которая тем не менее равна нулю. В этом случае векторы  $a, b, \dots, e$  называются *линейно зависимыми*. Иначе говоря, эти векторы будут линейно зависимыми, если найдутся такие действительные числа  $\alpha, \beta, \dots, \epsilon$ , не все равные нулю, что

$$\alpha a + \beta b + \dots + \epsilon e = 0.$$

Если же это равенство выполняется только тогда, когда все числа  $\alpha, \beta, \dots, \epsilon$  равны нулю, то векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{e}$  называются *линейно независимыми*.

Отметим три простых свойства линейно зависимых векторов.

а) *Если векторы линейно зависимы, то один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных, и, обратно, если один из векторов есть линейная комбинация остальных, то векторы линейно зависимы.*

В самом деле, пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{e}$  — линейно зависимые векторы. Тогда

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \dots + \epsilon \mathbf{e} = \mathbf{0},$$

где не все коэффициенты равны нулю. Пусть, например,  $\alpha \neq 0$ . Тогда

$$\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{b} - \dots - \frac{\epsilon}{\alpha} \mathbf{e},$$

что и доказывает теорему.

Обратно, если

$$\mathbf{a} = m\mathbf{b} + \dots + p\mathbf{e},$$

то

$$1 \cdot \mathbf{a} + (-m)\mathbf{b} + \dots + (-p)\mathbf{e} = \mathbf{0},$$

т. е. векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{e}$  линейно зависимы.

б) *Если некоторые из векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{e}$  линейно зависимы, то и вся эта система векторов линейно зависима.*

Пусть линейно зависимы векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ . Тогда

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

где хотя бы один из коэффициентов  $\alpha, \beta$  отличен от нуля. Но тогда и

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{c} + \dots + 0 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Это равенство показывает линейную зависимость векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{e}$ , так как среди коэффициентов линейной комбинации, стоящей в его левой части, имеются отличные от нуля.

в) *Если среди векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{e}$  имеется хотя бы один нулевой, то эти векторы линейно зависимы.*

Пусть, например,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Тогда

$$\alpha \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} + \dots + 0 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \alpha \neq 0.$$

2. Приведем примеры линейно зависимых и линейно независимых векторов пространства  $L_3$ .

а) Нулевой вектор  $\mathbf{0}$  является линейно зависимым, так как  $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$  при любом  $\alpha \neq 0$  (это следует также из свойства в)).

б) Любой вектор  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  будет линейно независимым, так как  $\alpha \mathbf{a} = \mathbf{0}$  только при  $\alpha = 0$ .

в) Два коллинеарных \*) вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  линейно зависимы. Действительно, если  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , то  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$  или  $\lambda \mathbf{a} + (-1) \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

Если же  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , то эти векторы линейно зависимы в силу свойства в).

г) Два неколлинеарных вектора линейно независимы. В самом деле, предположим противное: пусть  $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , где  $\beta \neq 0$ . Тогда  $\mathbf{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \mathbf{a}$ . Это означает, что

векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны.

д) Три компланарных \*\*) вектора линейно зависимы. Пусть векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  компланарны, причем векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  не коллинеарны. Тогда вектор  $\mathbf{c}$  можно представить (рис. 1) в виде

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b},$$

что в силу свойства а) означает линейную зависимость векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ . Если же векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны, то они линейно зависимы, а поэтому в силу свойства б) и векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  линейно зависимы.

е) Три некомпланарных вектора всегда линейно независимы. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству примера г).

ж) Любые четыре вектора пространства всегда линейно зависимы. Действительно, если какие-нибудь три вектора линейно зависимы, то согласно свойству б) и все четыре вектора будут линейно зависимы. Если же имеются три линейно независимых вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , то любой четвертый вектор  $\mathbf{d}$

\*) Коллинеарными называются векторы, лежащие на одной прямой.

\*\*) Компланарными называются векторы, лежащие в одной плоскости.

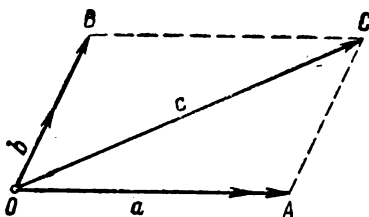


Рис. 1.

может быть представлен в виде линейной комбинации векторов  $a, b, c$  (рис. 2):  $d = \overline{OD} = \overline{OP} + \overline{PD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \lambda a + \mu b + \gamma c$ , откуда в силу свойства а) следует линейная зависимость векторов  $a, b, c, d$ .

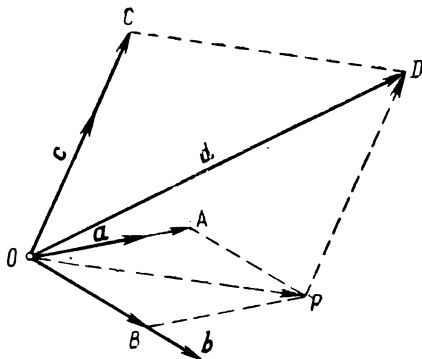


Рис. 2.

з) В пространстве  $L_n$  линейно независимыми будут векторы  $e_1 = \{1, 0, \dots, 0\}$ ,  $e_2 = \{0, 1, \dots, 0\}$ , ...,  $e_n = \{0, 0, \dots, 1\}$ . В самом деле, рассмотрим их линейную комбинацию

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}.$$

Эта комбинация будет равна нулю только тогда, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Система векторов пространства  $L_n$ , состоящая из векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и произвольного вектора  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , будет линейно зависимой, так как вектор  $x$  может быть представлен в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть  $a$  и  $b$  — два линейно независимых вектора пространства  $L_2$  (см. пример б) § 1).

1) Определить, при каком значении  $\alpha$  следующие пары векторов линейно зависимы (коллинеарны):

а)  $\alpha a + 2b, a - b$ ;

б)  $(\alpha + 1)a + b, 2b$ ;

в)  $\alpha a + b, a + \alpha b$ .

2) Найти  $\alpha$  и  $\beta$ , если

а)  $3a + 5b = \alpha a + (2\beta + 1)b$ ;

б)  $(2\alpha - \beta - 1)a - (3\alpha + \beta + 10)b = 0$ .

2. Пусть  $a, b, c$  — три линейно независимых вектора пространства  $L_3$  (см. пример в) § 1).

а) При каком значении  $\alpha$  векторы

$$x = \alpha a + 4b + 2c, \quad y = a + \alpha b - c$$

линейно зависимы (коллинеарны)?

б) При каком значении  $\alpha$  векторы

$$x = \alpha a + b + 3c, \quad y = \alpha a - 2b + c, \quad z = a - b + c$$

линейно зависимы (компланарны)?

3. Доказать, что в пространстве  $C[a, b]$  (см. пример ж) § 1) следующие функции линейно зависимы:

а)  $\varphi_1(t) = \sin^2 t, \quad \varphi_2(t) = \cos^2 t, \quad \varphi_3(t) = 1$ ;

б)  $\varphi_1(t) = \sin^2 t, \quad \varphi_2(t) = \cos^2 t, \quad \varphi_3(t) = t, \quad \varphi_4(t) = 3, \quad \varphi_5(t) = e^t$ ;

в)  $\varphi_1(t) = \sqrt{t}, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{t^2}, \quad \varphi_3(t) = 0, \quad \varphi_4(t) = t^5$ .

4. Доказать, что в пространстве  $C[0, 2]$  функции

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t < 1, \\ (t-1)^4, & \text{если } 1 \leq t \leq 2; \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} (t-1)^4, & \text{если } 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{если } 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

линейно независимы.

5. Доказать, что в пространстве многочленов степени, не большей  $n$  (см. пример е) § 1), многочлены

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad \dots, \quad P_n(t) = t^n$$

линейно независимы.

6. Доказать, что в пространстве  $C[a, b]$  (см. пример ж) § 1) существует любое число линейно независимых векторов.

7. Доказать линейную зависимость векторов  $a_1 = \{0, 1, 1\}$ ,  $a_2 = \{1, 1, 2\}$ ,  $a_3 = \{1, 2, 3\}$  пространства  $L_3$ .

8. Доказать, что совокупность векторов будет линейно зависимой, если она содержит

а) два равных вектора,

б) два коллинеарных вектора.

9. Доказать, что если векторы  $a_1, a_2, a_3$  линейно независимы, то и векторы  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1$  линейно независимы.

### § 3. Размерность и базис линейного пространства

*Размерностью* линейного пространства называется наибольшее число имеющихся в нем линейно независимых векторов.

Например, на прямой существует один линейно независимый вектор, а любые два вектора линейно зависимы. Следова-

вательно, прямая представляет собой одномерное линейное пространство. Выше мы обозначили его  $L_1$ . Здесь нижний индекс как раз означает размерность пространства.

На плоскости существуют два линейно независимых вектора, но любые три вектора линейно зависимы. Поэтому плоскость является двумерным пространством и обозначается через  $L_2$ .

В пространстве существуют три линейно независимых вектора, а любые четыре вектора линейно зависимы. Поэтому размерность пространства равна трем, и мы обозначим его через  $L_3$ .

В линейном пространстве, элементами которого являются векторы  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , мы нашли  $n$  линейно независимых векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . С другой стороны, можно показать, что любые  $n+1$  векторов этого пространства будут линейно зависимыми. Следовательно, размерность этого пространства равна  $n$ , и мы обозначили его поэтому через  $L_n$ .

Рассмотрим теперь произвольное  $n$ -мерное линейное пространство (здесь, в частности,  $n$  может быть равно 1, 2 или 3) и выберем в нем любые  $n$  линейно независимых векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Пусть  $x$  — произвольный вектор пространства. Тогда векторы  $x, e_1, e_2, \dots, e_n$  будут линейно зависимыми, так как их число превышает размерность пространства. Поэтому найдутся такие числа  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , что

$$\alpha x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

При этом  $\alpha \neq 0$ , так как в противном случае векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  были бы линейно зависимыми. Следовательно, вектор  $x$  может быть представлен в виде линейной комбинации векторов  $e_1, \dots, e_n$ :

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} e_n.$$

Положим теперь

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha} = x_1, \dots, -\frac{\alpha_n}{\alpha} = x_n.$$

Тогда вектор  $x$  представится в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (1)$$



Докажем единственность такого разложения. Предположим, что возможно другое разложение вектора  $x$  по векторам  $e_1, \dots, e_n$ :

$$x = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \dots + x'_n e_n.$$

Тогда

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \dots + x'_n e_n$$

и

$$(x_1 - x'_1) e_1 + (x_2 - x'_2) e_2 + \dots + (x_n - x'_n) e_n = 0.$$

Но так как векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независимы, то

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad \dots, \quad x_n = x'_n.$$

Мы доказали тем самым, что *любой вектор  $x$  может быть, и притом единственным образом, представлен в виде линейной комбинации линейно независимых векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Совокупность этих векторов называется базисом  $n$ -мерного линейного пространства, а числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координатами вектора  $x$  в этом базисе. Мы доказали также, что любые  $n$  линейно независимых векторов могут быть приняты за базис пространства.*

В частности, на прямой  $L_1$  любой вектор  $x$  может быть представлен в виде

$$x = x_1 e_1,$$

где  $e_1$  — произвольный отличный от нуля вектор этой прямой. На плоскости  $L_2$  вектор  $x$  может быть представлен в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

где  $e_1$  и  $e_2$  — любые два неколлинеарных вектора этой плоскости. И, наконец, в пространстве  $L_3$  любой вектор  $x$  может быть представлен в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

где  $e_1, e_2, e_3$  — любые три некомпланарных вектора пространства.

Разложение (1) более кратко может быть записано в виде

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k.$$

Однако и такая запись часто оказывается не очень удобной и ее упрощают, отбрасывая знак суммы, т. е. пишут

$$x = x_k e_k, \quad (2)$$

полагая, что по индексу  $k$ , повторяющемуся дважды, производится суммирование от 1 до  $n$ . Это правило называется «соглашением о суммировании»; оно было предложено А. Эйнштейном. Индекс  $k$  называется *индексом суммирования*. Он может быть заменен любой другой буквой, так что

$$x_k e_k = x_i e_i = x_a e_a = \dots$$

Теперь ясно, что при заданном базисе векторы пространств  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  вполне определяются своими координатами. Следовательно, эти пространства могут быть рассмотрены как частные виды пространства  $L_n$  при  $n = 1, 2, 3$ .

Все последующее изложение будем вести, ограничиваясь для наглядности лишь случаем плоскости или обычного трехмерного пространства. Поэтому во всех дальнейших формулах  $n = 2$  или 3 и индексы суммирования пробегает соответственно значения 1 и 2 или 1, 2 и 3. Однако большая часть содержания этой книги остается справедливой и для общего линейного пространства  $n$  измерений.

Напомним еще следующие хорошо известные свойства координат векторов:

а) Если два вектора равны, то равны и их соответствующие координаты.

б) При сложении векторов их соответствующие координаты складываются.

в) При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что векторы  $\alpha_1 = \{1, 1, 1\}$ ,  $\alpha_2 = \{1, 1, 2\}$  и  $\alpha_3 = \{1, 2, 3\}$  образуют базис пространства  $L_3$ , и записать в этом базисе вектор  $x = \{6, 9, 14\}$ .

2. Найти размерность и базис пространства многочленов степени, не превосходящей  $n$  (см. пример *e*) § 1 и упр. 5 § 2). Чему равны координаты произвольного многочлена в найденном базисе?

3. Какова размерность пространства  $C[a, b]$  (см. пример ж) § 1 и упр. 6 § 2)?

4. Найти размерность и базис пространства, рассмотренного в задаче 4 § 1.

5. Доказать, что если размерность подпространства  $L'_n$  совпадает с размерностью пространства  $L_n$ , то  $L_n \equiv L'_n$ .

6. Доказать, что сумма размерностей двух линейных подпространств  $L'$  и  $L''$  пространства  $L_n$  равна размерности суммы этих подпространств, сложенной с размерностью их пересечения.

7. Доказать, что если размерность суммы двух линейных подпространств  $L'$  и  $L''$  на единицу больше размерности их пересечения, то сумма совпадает с одним из этих подпространств, а пересечение — с другим.

8. Доказать, что если два подпространства  $L'$  и  $L''$  пространства  $L$  имеют общим лишь нулевой вектор, то сумма их размерностей не превосходит размерности  $L$ .

9. Что представляет собой пересечение и сумма двух двумерных подпространств пространства  $L_3$ ?

*Линейным подпространством  $L'$  пространства  $L_n$ , определяемым векторами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , называется подпространство наименьшей размерности, содержащее эти векторы.*

10. Найти размерность  $s$  суммы и размерность  $d$  пересечения линейных подпространств  $L'$  и  $L''$  пространства  $L_4$ , определяемых векторами

$$L': a_1 = \{1, 1, 1, 1\}, \quad a_2 = \{1, -1, 1, -1\}, \quad a_3 = \{1, 3, 1, 3\};$$

$$L'': b_1 = \{1, 2, 0, 2\}, \quad b_2 = \{1, 2, 1, 2\}, \quad b_3 = \{3, 1, 3, 1\}.$$

11. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств  $L'$  и  $L''$  пространства  $L_4$ , определяемых векторами

$$L': a_1 = \{1, 2, 1, -2\}, \quad a_2 = \{2, 3, 1, 0\}, \quad a_3 = \{1, 2, 2, -3\};$$

$$L'': b_1 = \{1, 1, 1, 1\}, \quad b_2 = \{1, 0, 1, -1\}, \quad b_3 = \{1, 3, 0, -4\}.$$

12. Найти какой-нибудь базис и определить размерность следующих подпространств пространства  $L_n$ :

а) совокупности  $n$ -мерных векторов, у которых первая и вторая координаты равны;

б) совокупности  $n$ -мерных векторов, у которых координаты с четными номерами равны между собой;

в) совокупности  $n$ -мерных векторов вида  $\{\alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots\}$ ;

г) совокупности  $n$ -мерных векторов  $(x_1, \dots, x_n)$ , для которых  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ .

13. Какие решения линейного однородного дифференциального уравнения образуют базис линейного пространства решений этого уравнения (см. упр. 5 § 1)? Какова размерность этого пространства? Какие числа служат координатами произвольного решения этого уравнения в найденном базисе?



Как известно, скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

- 1)  $xy = yx$ ,
- 2)  $(\lambda x)y = \lambda(x, y)$ ,
- 3)  $(x + y)z = xz + yz$ ,
- 4)  $xx > 0$  при  $x \neq 0$ .

Скалярные произведения базисных векторов ортонормированного базиса определяются из следующей таблицы умножения:

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	1	0	0
$e_2$	0	1	0
$e_3$	0	0	1

Введем величины  $\delta_{ij}$ , определяемые равенствами

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Тогда скалярные произведения базисных векторов могут быть записаны в виде

$$e_i e_j = \delta_{ij}.$$

Величины  $\delta_{ij}$  называются *симметричными символами Кронекера*.

Пусть  $x_i = x_i e_i$  и  $y_j = y_j e_j$  — два произвольных вектора пространства. Тогда

$$xy = (x_i e_i)(y_j e_j),$$

и так как скалярное произведение обладает свойствами 2) и 3), то в правой части этого равенства можно раскрыть скобки (читателю эту выкладку рекомендуется проделать подробно):

$$xy = x_i y_j (e_i e_j).$$

Теперь здесь стоит сумма, состоящая из девяти слагаемых, так как индексы  $i$  и  $j$  независимо друг от друга пробегают значения от 1 до 3. Но отличными от нуля будут лишь три из этих слагаемых, так как  $e_i e_j = 0$  при  $i \neq j$ . Поскольку в не равных нулю слагаемых  $e_i e_i = 1$ , мы получим

$$xy = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

— хорошо знакомое из аналитической геометрии выражение для скалярного произведения векторов. Если применить здесь снова соглашение о суммировании, то это выражение можно переписать в виде

$$xy = x_k y_k.$$

Найдем скалярное произведение произвольного вектора  $x = x_i e_i$  на базисный вектор  $e_k$ :

$$xe_k = x_i (e_i e_k) = x_i \delta_{ik}.$$

Выражение  $x_i \delta_{ik}$  есть сумма трех слагаемых, два из которых при  $i \neq k$  равны нулю, так как  $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ ; не равным нулю будет лишь одно слагаемое, получающееся при  $i = k$ . Поскольку  $\delta_{kk} = 1$ , то  $x_i \delta_{ik} = x_k$ . Следовательно,

$$xe_k = x_k.$$

Это означает, что *прямоугольные координаты вектора  $x$  представляют ортогональные проекции этого вектора на соответствующую ось*.

Запишем в новых обозначениях некоторые хорошо известные из аналитической геометрии геометрические факты, вытекающие из определения скалярного произведения векторов:

а) *Длина вектора  $x = x_i e_i$  вычисляется по следующей формуле:*

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{\delta_{ij} x_i x_j},$$

или

$$|x| = \sqrt{x_i x_i}.$$

б) *Косинус угла  $\varphi$  между векторами  $x = x_i e_i$  и  $y = y_i e_i$  вычисляется так:*

$$\cos \varphi = \frac{xy}{|x||y|} = \frac{x_i y_i}{\sqrt{x_i x_i} \sqrt{y_i y_i}}.$$

Поэтому условием ортогональности векторов  $x$  и  $y$  служит равенство

$$x_i y_i = 0.$$

в) Если  $a$  — единичный вектор, то его координаты  $a_k$  будут равны косинусам углов, которые этот вектор образует с базисными векторами  $e_k$ :

$$a_k = ae_k = \cos \alpha_k.$$



При этом, так как  $a^2 = 1$ , то

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1.$$

г) Проекция вектора  $x = x_i e_i$  на вектор  $a = a_i e_i$  определяется формулой

$$\text{Пр}_a x = \frac{ax}{|a|} = \frac{a_i x_i}{\sqrt{a_i a_i}}.$$

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя скалярное произведение, доказать следующие теоремы элементарной геометрии:

- теорему косинусов для треугольника;
- теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма;
- теорему о перпендикулярности диагоналей ромба;
- теорему о равенстве диагоналей прямоугольника;
- теорему Пифагора;
- длина медианы  $m_a$  треугольника со сторонами  $a, b, c$  равна

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}};$$

ж) если две медианы треугольника равны, то треугольник — равнобедренный;

з) сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований;

и) противоположные ребра правильного тетраэдра ортогональны.

2. Доказать неравенство Коши — Буняковского

$$(xy)^2 \leq (xx)(yy)$$

и записать его в координатной форме.

3. Для трех векторов  $x, y, x+y$  доказать неравенства треугольника

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x-y| \geq ||x| - |y||.$$

Скалярное произведение можно определить для любого линейного пространства. Будем говорить, что в  $L$  задано скалярное произведение, если каждой паре векторов  $x, y \in L$  поставлено в соответствие действительное число  $xy$ , так что

1)  $xy = yx$ ;

2)  $(\lambda x)y = \lambda(xy)$ , где  $\lambda$  — любое действительное число;

3)  $(x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y$ ;

4)  $xx \geq 0$ , причем равенство нулю имеет место лишь для  $x = 0$ .

Линейное пространство  $L$ , в котором определено скалярное произведение, будем называть евклидовым пространством и обо-

значать  $E$ . Дадим теперь определения длины вектора, угла между двумя векторами и ортогональности векторов в евклидовом пространстве  $E$ , которые аналогичны соответствующим понятиям в трехмерном евклидовом пространстве  $E_3$ , рассмотренным в § 4.

Длиной вектора  $x \in E$  называется величина

$$|x| = \sqrt{xx}.$$

Углом между векторами  $x, y \in E$  называется угол  $\varphi$  ( $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ), косинус которого равен

$$\cos \varphi = \frac{xy}{|x||y|}.$$

Векторы  $x$  и  $y$ , для которых

$$xy = 0,$$

называются *ортогональными*.

4. Можно ли в  $L_3$  определить скалярное произведение двух векторов как

а) произведение их длин?

б) произведение их длин на квадрат косинуса угла между ними?

в) утроенное обычное скалярное произведение?

5. Доказать, что в пространстве  $L_n$  (см. пример д) § 1) скалярное произведение двух векторов  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  и  $y = \{y_1, \dots, y_n\}$  можно определить формулой

$$xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

6. Доказать, что в пространстве  $C[a, b]$  (см. пример ж) § 1) скалярное произведение функций  $f(t)$  и  $g(t)$  можно определить формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Как будет выражаться длина вектора  $f(t)$ ?

7. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  и  $y = \{y_1, \dots, y_n\}$   $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  тогда и только тогда выражается равенством

$$xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n,$$

когда базис, в котором заданы векторы  $x$  и  $y$  является ортонормированным.

8. Доказать, что в пространстве  $E$ , так же как и в  $E_3$ , имеет место неравенство Коши — Буняковского

$$(xy)^2 \leq (xx)(yy).$$

Показать, что равенство справедливо только для коллинеарных векторов (см. задачу 2).

9. Записать неравенство Коши — Буняковского для векторов пространства  $E_n$  в координатной форме и для векторов пространства

$C[a, b]$ , в котором скалярное произведение определено, как в задаче 6.

10. Найти углы в треугольнике, образованном в пространстве  $C[-1, 1]$  векторами  $x_1(t) = 1$ ,  $x_2(t) = t$ ,  $x_3(t) = 1 - t$ .

11. Доказать, что любые два вектора тригонометрической системы функций

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

пространства  $C[-\pi, \pi]$  ортогональны.

12. Доказать, что попарно ортогональные ненулевые векторы  $x_1, \dots, x_n$  пространства  $E_n$  линейно независимы.

13. Если в пространстве  $E$  вектор  $x$  ортогонален векторам  $y_1, \dots, y_k$ , то он ортогонален и к любой их линейной комбинации  $c_1 y_1 + \dots + c_k y_k$ .

14. Доказать, что если векторы  $x_1, x_2, \dots, x_k$  пространства  $E_n$  попарно ортогональны, то

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_k|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_k|^2$$

(обобщенная теорема Пифагора, см. задачу 1д).

15. Доказать, что для любых двух векторов  $x$  и  $y$  пространства  $E$

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||$$

(обобщенные неравенства треугольника, см. задачу 3).

16. Записать неравенства треугольника, полученные в предыдущей задаче, для пространства  $C[a, b]$ , в котором скалярное произведение определено так, как указано в задаче 6.

17. Доказать, что для вектора  $x \in E_n$  имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^k (\text{Пр}_{e_i} x)^2 \leq xx,$$

где  $k \leq n$  и  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис  $E_n$ . Доказать, что неравенство обращается в равенство (равенство Парсеваля) тогда и только тогда, когда  $k = n$ .

18. Пусть  $E_{n+1}$  — евклидово пространство, элементами которого служат многочлены степени, не превосходящей  $n$ , с действительными коэффициентами, и скалярное произведение многочленов  $P(t)$  и  $Q(t)$  определено формулой

$$(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt.$$

а) Доказать, что многочлены

$$P_0(t) = 1, P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(t^2 - 1)^k], \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(полиномы Лежандра) образуют ортогональный базис этого пространства.

б) Написать полиномы Лежандра для  $k=0, 1, 2, 3, 4$ . Убедиться, что степень  $P_k(t)$  равна  $k$ , и написать разложение  $P_k(t)$  по степеням  $t$ .

в) Вычислить длину  $P_k(t)$ .

г) Найти  $P_k(1)$ .

## § 5. Векторное и смешанное произведения векторов

1. Векторным произведением векторов  $x$  и  $y$  называется третий вектор  $z$ , удовлетворяющий следующим требованиям:

1) длина вектора  $z$  равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $x$  и  $y$ , т. е.  $|z| = |x||y|\sin\varphi$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $x$  и  $y$ ;

2) вектор  $z$  ортогонален каждому из векторов  $x$  и  $y$ ;

3) вектор  $z$  образует с векторами  $x$  и  $y$  правую тройку векторов.

Векторное произведение векторов  $x$  и  $y$  обычно обозначается через  $x \times y$ .

Оно обладает следующими свойствами:

1)  $x \times y = -(y \times x)$ ;

2)  $(\lambda x) \times y = \lambda(x \times y)$ ;

3)  $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$ .

Найдем теперь таблицу векторных произведений векторов ортонормированного базиса пространства  $L_3$ . Эта таблица будет по-разному записываться для правого и левого базисов:

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	0	$e_3$	$-e_2$
$e_2$	$-e_3$	0	$e_1$
$e_3$	$e_2$	$-e_1$	0

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	0	$-e_3$	$e_2$
$e_2$	$e_3$	0	$-e_1$
$e_3$	$-e_2$	$e_1$	0

В этих таблицах векторы, стоящие слева, считаются первыми, а векторы, стоящие сверху, — вторыми сомножителями векторного произведения.

Чтобы записать векторные произведения базисных векторов в одной форме для любого ортонормированного базиса, введем величину  $\epsilon$ , которая равна  $\pm 1$ , если базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$

правый, и  $-1$ , если этот базис левый; таким образом, эта величина зависит от выбора базиса. Затем введем величины  $\epsilon_{ijk}$ , определяемые равенствами

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = \epsilon,$$

$$\epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -\epsilon$$

и равные нулю, если какие-нибудь два из индексов  $i, j, k$  равны между собой. Эти величины также зависят от выбора базиса. Их называют *кососимметричными символами Кронекера*.

При помощи величин  $\epsilon_{ijk}$  векторные произведения базисных векторов всегда, при любой ориентации базиса, могут быть записаны в виде

$$e_i \times e_j = \epsilon_{ijk} e_k,$$

где в правой части, как обычно, производится суммирование по индексу  $k$ . Эти формулы легко доказываются простой проверкой, например:

$$e_1 \times e_2 = \epsilon_{12k} e_k = \epsilon_{121} e_1 + \epsilon_{122} e_2 + \epsilon_{123} e_3.$$

Но первые два члена этой суммы равны нулю, а  $\epsilon_{123} = \epsilon$ , поэтому

$$e_1 \times e_2 = \epsilon e_3.$$

Отсюда для правой системы мы получим

$$e_1 \times e_2 = e_3,$$

а для левой

$$e_1 \times e_2 = -e_3,$$

что соответствует нашим таблицам.

Пусть  $x = x_i e_i$  и  $y = y_j e_j$  — два произвольных вектора. Тогда

$$x \times y = (x_i e_i) \times (y_j e_j).$$

Пользуясь вторым и третьим свойствами векторного произведения, мы получим отсюда

$$x \times y = x_i y_j (e_i \times e_j) = \epsilon_{ijk} x_i y_j e_k,$$

где в правой части суммирование происходит по всем трем индексам  $i, j, k$ . Подробно правая часть этого равенства, если

отбросить равные нулю слагаемые, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \\ &= \varepsilon \{ (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3 \} \end{aligned}$$

или, как обычно, в виде определителя третьего порядка:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \varepsilon \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Если обозначить векторное произведение  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  через  $\mathbf{z}$ , то координаты  $z_k$  вектора  $\mathbf{z}$  запишутся следующим образом:

$$z_k = \varepsilon_{kij} x_i y_j$$

(так как  $\varepsilon_{ijh} = \varepsilon_{kij}$ ), или более подробно:

$$z_1 = \varepsilon (x_2 y_3 - x_3 y_2),$$

$$z_2 = \varepsilon (x_3 y_1 - x_1 y_3),$$

$$z_3 = \varepsilon (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

При  $\varepsilon = 1$  эти формулы совпадают с хорошо известными из аналитической геометрии (где рассматривались лишь правые базисы) формулами для координат векторного произведения.

Заметим, что введенное нами определение векторного произведения несколько отличается от определения этого понятия, принятого во многих книгах по аналитической геометрии и векторному исчислению (см., например, [10], стр. 44). Это отличие состоит в том, что в нашем определении векторное произведение не зависит от ориентации системы координат, а в упомянутых книгах оно меняет знак при изменении этой ориентации. Поэтому там векторное произведение не является обычным вектором, а является так называемым *аксиальным* вектором. У нас же векторное произведение определено однозначно, независимо от выбора базиса, и поэтому оно является *обычным* вектором. Тем самым мы избавляемся от необходимости рассмотрения аксиальных векторов.

2. *Смешанное произведение векторов* определяется формулой

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \mathbf{z}$$



и равно объему параллелепипеда, построенного на векторах  $x$ ,  $y$  и  $z$ , взятому со знаком плюс, если векторы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  образуют правую тройку, и со знаком минус в противном случае.

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:

- 1)  $(x, y, z) = -(y, x, z)$ ;
- 2)  $(x, y, z) = (y, z, x) = (z, x, y)$ ;
- 3)  $(\lambda x, y, z) = \lambda(x, y, z)$ ;
- 4)  $(x + y, z, u) = (x, z, u) + (y, z, u)$ .

Легко проверить, что для смешанных произведений базисных векторов имеют место формулы

$$(e_i, e_j, e_k) = \varepsilon_{ijk}.$$

В самом деле,

$$(e_i, e_j, e_k) = (e_i \times e_j) e_k = \varepsilon_{ijl} (e_l e_k).$$

В правой части этого равенства производится суммирование по индексу  $l$ . Но скалярное произведение  $e_l e_k$  будет отлично от нуля только тогда, когда  $l = k$ . Поэтому в рассматриваемой сумме останется только один отличный от нуля член  $\varepsilon_{ijk} (e_k e_k)$ . И так как  $e_k e_k = 1$ , то мы и получим доказываемую формулу.

Пусть теперь даны три произвольных вектора  $x = x_i e_i$ ,  $y = y_j e_j$  и  $z = z_k e_k$ . Их смешанное произведение запишется в виде

$$(x, y, z) = (x_i e_i, y_j e_j, z_k e_k).$$

Пользуясь третьим и четвертым свойствами смешанного произведения, мы можем раскрыть скобки, стоящие в правой части этого равенства. Тогда мы получим

$$(x, y, z) = x_i y_j z_k (e_i, e_j, e_k) = \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k,$$

где индексы  $i, j, k$  независимо друг от друга принимают значения 1, 2, 3 и по ним производится суммирование. Следовательно, в правой части этого равенства стоит сумма, содержащая  $3^3 = 27$  слагаемых. Но из этих слагаемых только 6 будут отличными от нуля, так как в остальных слагаемых у величин  $\varepsilon_{ijk}$  будут повторяющиеся индексы. Поэтому в подробной записи предыдущая сумма при-

мет вид

$$(x, y, z) = \varepsilon (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2).$$

Это выражение может быть обычным образом записано в виде определителя третьего порядка:

$$(x, y, z) = \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

3. Рассмотрим двойное векторное произведение  $x \times (y \times z)$  трех векторов  $x$ ,  $y$  и  $z$  и докажем, что имеет место соотношение

$$x \times (y \times z) = y(xz) - z(xy). \quad (1)$$

Если векторы  $y$  и  $z$  коллинеарны, то легко проверить, что как левая, так и правая часть равенства (1) будет равна нулю. Предположим теперь, что  $y$  и  $z$  не коллинеарны, и пусть  $u = x \times (y \times z)$ . Вектор  $u$  ортогонален вектору  $y \times z$  и поэтому лежит в плоскости  $\pi$ , определяемой векторами  $y$  и  $z$ , т. е.

$$u = \lambda y + \mu z. \quad (2)$$

Обозначим через  $z^*$  вектор, лежащий в плоскости  $\pi$  и получающийся из  $z$  поворотом на  $90^\circ$  по часовой стрелке, если смотреть из конца вектора  $y \times z$ . Векторы  $z^*$ ,  $z$  и  $y \times z$  образуют правую ортогональную тройку векторов. Теперь

$$uz^* = \lambda(yz^*) + \mu(zz^*). \quad (3)$$

С другой стороны,

$$uz^* = [x \times (y \times z)]z^* = [(y \times z) \times z^*]x.$$

Положим  $v = (y \times z) \times z^*$ . Тогда вектор  $v$  имеет то же направление, что и вектор  $z$ , и, так как векторы  $y \times z$  и  $z^*$  ортогональны,  $|v| = |y \times z| |z^*|$ , откуда

$$|v| = |y| |z|^2 \sin(y, z) = |y| |z|^2 \cos(y, z^*) = |z| (yz^*)$$

(здесь  $(y, z)$  обозначает угол между  $y$  и  $z$ ). Поэтому

$$v = (yz^*)z.$$

Теперь

$$uz^* = (yz^*)(xz),$$

и, сравнивая это соотношение с равенством (3), мы получаем  $\lambda = xz$ .

Но если умножить соотношение (2) скалярно на вектор  $x$ , то мы получим, что

$$\lambda(xy) + \mu(xz) = 0,$$

откуда  $\mu = -xy$ . Это завершает доказательство формулы (1).

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Параллелепипед построен на векторах  $a, b, c$ . Найти площади его диагональных сечений.

2. Выразить синус двугранного угла при ребре  $AB$  тетраэдра  $OABC$  через векторы  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ .

3. Выразить высоты треугольника через радиусы-векторы  $r_1, r_2, r_3$  его вершин.

4. Доказать, что сумма нормальных векторов к граням тетраэдра  $OABC$ , направленных вне тетраэдра и равных по модулю площадям соответственных граней, равна нулю, а для площадей этих граней имеет место формула

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2 \cos(S_1, S_2) - 2S_2S_3 \cos(S_2, S_3) - 2S_3S_1 \cos(S_3, S_1),$$

где  $(S_i, S_j)$  обозначает угол между гранями  $S_i$  и  $S_j$ .

5. Пусть

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

— определитель третьего порядка и  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  в этом определителе. Доказать, что имеют место следующие соотношения:

$$a) \quad a = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr};$$

$$б) \quad A_{ij} = \frac{1}{2!} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jpq} a_{kp} a_{lq};$$

$$в) \quad A_{ik} a_{kj} = \delta_{ij} a.$$

6. Доказать тождество Лагранжа

$$(a \times b)(c \times d) = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix}.$$

7. Используя результат задачи 6, найти  $(a \times b)^2$  и записать полученную формулу в координатной форме.

8. Доказать, что из равенства

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

следует коллинеарность векторов  $a$  и  $c$ , если  $ab \neq 0, bc \neq 0$ .

## 9. Доказать тождество Якоби

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0.$$

10. Через вершину трехгранного угла в каждой грани проводится прямая, перпендикулярная противоположному ребру. Доказать, что построенные три прямые компланарны. Ребра трехгранного угла предполагаются не перпендикулярными противоположащим граням.

11. Дан четырехгранный угол  $OABCD$  с прямыми плоскими углами  $AOB$  и  $COD$ . Доказать, что прямые  $p = OBC \times OAD$  и  $q = OAC \times OBD$  перпендикулярны.

12. Найти площадь основания треугольной пирамиды, зная длины ее боковых ребер  $a, b, c$  и плоские углы  $\alpha, \beta, \gamma$  при вершине ( $\alpha$  лежит против  $a$  и т. д.).

13. Вычислить смешанное произведение

$$(a + b, b + c, c + a)$$

и выяснить геометрический смысл полученного результата.

14. Пусть  $a, b, c$  — три некопланарных вектора. Как связаны между собой числа  $\lambda, \mu, \nu$ , если векторы  $a + \lambda b, b + \mu c, c + \nu a$  компланарны? Вывести из полученного результата прямую теорему Менелая (произведение трех отношений, в которых произвольная прямая делит стороны треугольника, равно  $-1$ ) и обратную теорему Менелая (если три точки, лежащие на сторонах треугольника, делят их в отношениях, произведение которых равно  $-1$ , то эти три точки лежат на одной прямой).

15. Пользуясь смешанным произведением векторов, вывести формулы Крамера для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, записанной в векторной форме (см. задачу 14 § 3).

16. Используя формулу для двойного векторного произведения, доказать формулы:

а)  $(a \times b) \times (c \times d) = b(a, c, d) - a(b, c, d);$

б)  $((a \times b), (c \times d), (e \times f)) = (b, e, f)(a, c, d) - (a, e, f)(b, c, d).$

17. Доказать, что

а)  $a(b, c, d) - b(c, d, a) + c(d, a, b) - d(a, b, c) = 0;$

б)  $(a \times b, b \times c, c \times a) = (a, b, c)^2,$

и выяснить геометрический смысл этих формул.

18. Доказать формулу

$$(a, b, c)(x, y, z) = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{vmatrix}.$$

19. Три вектора образуют попарно углы  $\alpha, \beta, \gamma$ . Доказать, что необходимое и достаточное условие их компланарности выражается

равенством

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \beta & 1 & \cos \alpha \\ \cos \gamma & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## § 6. Преобразования ортонормированного базиса. Основная задача тензорного исчисления

1. Пусть в пространстве  $L_3$ , наряду с ортонормированным базисом  $\{e_1, e_2, e_3\}$  с началом в  $O$ , задан другой ортонормированный базис  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  с тем же началом  $O$  (рис. 3). Векторы нового базиса  $e_{i'}$  сами могут быть разложены по векторам старого базиса. Будем обозначать через  $\gamma_{i'i}$  коэффициент при  $e_i$  в разложении вектора  $e_{i'}$  по векторам старого базиса. Тогда разложения векторов  $e_{i'}$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} e_{1'} &= \gamma_{1'1}e_1 + \gamma_{1'2}e_2 + \gamma_{1'3}e_3, \\ e_{2'} &= \gamma_{2'1}e_1 + \gamma_{2'2}e_2 + \gamma_{2'3}e_3, \\ e_{3'} &= \gamma_{3'1}e_1 + \gamma_{3'2}e_2 + \gamma_{3'3}e_3. \end{aligned}$$

Короче эти три равенства можно записать так:

Рис. 3.

$$e_{i'} = \gamma_{i'i}e_i. \quad (1)$$

Умножим скалярно каждое из равенств (1) на каждый из векторов  $e_i$ . Тогда, учитывая, что  $e_i e_j = \delta_{ij}$ , получим

$$e_i e_{i'} = \gamma_{i'i}.$$

Но так как векторы  $e_i$  и  $e_{i'}$  единичные, то

$$e_i e_{i'} = \cos(e_{i'}, e_i),$$

где через  $(e_{i'}, e_i)$  обозначен угол между векторами  $e_{i'}$  и  $e_i$ . Поэтому

$$\gamma_{i'i} = \cos(e_{i'}, e_i). \quad (2)$$

С другой стороны, мы можем записать разложение векторов старого базиса по векторам  $e_{i'}$  нового. Если обозначить

через  $\gamma_{ii'}$  коэффициент при  $e_{i'}$  в разложении векторов  $e_i$  по векторам нового базиса, то эти разложения будут иметь вид

$$e_1 = \gamma_{11'}e_{1'} + \gamma_{12'}e_{2'} + \gamma_{13'}e_{3'},$$

$$e_2 = \gamma_{21'}e_{1'} + \gamma_{22'}e_{2'} + \gamma_{23'}e_{3'},$$

$$e_3 = \gamma_{31'}e_{1'} + \gamma_{32'}e_{2'} + \gamma_{33'}e_{3'}$$

или, в сокращенной записи,

$$e_i = \gamma_{ii'}e_{i'} \quad (i, i' = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Теперь, если каждое из равенств (3) скалярно умножить на каждый из векторов  $e_{i'}$ , то получим

$$e_i e_{i'} = \cos(e_i, e_{i'}) = \gamma_{ii'}. \quad (4)$$

Равенства (2) и (4) означают, что

$$\gamma_{ii'} = \gamma_{i'i}. \quad (5)$$

Числа  $\gamma_{i'i}$  можно записать в виде таблицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1'1} & \gamma_{1'2} & \gamma_{1'3} \\ \gamma_{2'1} & \gamma_{2'2} & \gamma_{2'3} \\ \gamma_{3'1} & \gamma_{3'2} & \gamma_{3'3} \end{pmatrix}.$$

Таблица с одинаковым количеством строк и столбцов называется *квадратной матрицей*. Число строк (столбцов) называется *порядком* матрицы. Таким образом, таблица  $\Gamma$  представляет собой квадратную матрицу третьего порядка и называется *матрицей перехода от старого базиса к новому*. Аналогично числа  $\gamma_{ii'}$  образуют матрицу

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11'} & \gamma_{12'} & \gamma_{13'} \\ \gamma_{21'} & \gamma_{22'} & \gamma_{23'} \\ \gamma_{31'} & \gamma_{32'} & \gamma_{33'} \end{pmatrix}$$

— *матрицу перехода от нового базиса к старому* (обозначение  $\Gamma^{-1}$  показывает, что эта матрица обратного перехода). Более коротко матрицы  $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$  будем записывать в виде

$$\Gamma = (\gamma_{i'i}), \quad \Gamma^{-1} = (\gamma_{ii'}).$$

Равенство (5) означает, что матрица  $\Gamma^{-1}$  получается из матрицы  $\Gamma$ , если в последней строки заменить столбцами.

Кроме того, для элементов этих двух матриц имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{i'k}\gamma_{j'k} &= \gamma_{ki'}\gamma_{kj'} = \delta_{i'j'}, \\ \gamma_{ik'}\gamma_{jk'} &= \gamma_{k'i}\gamma_{k'j} = \delta_{ij}.\end{aligned}\quad (6)$$

Действительно,

$$\gamma_{i'k}\gamma_{j'k} = \gamma_{i'1}\gamma_{j'1} + \gamma_{i'2}\gamma_{j'2} + \gamma_{i'3}\gamma_{j'3} = \mathbf{e}_{i'}\mathbf{e}_{j'} = \delta_{i'j'}.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Равенства (6) означают, что для матриц  $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$  *сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на соответствующие элементы другой строки (другого столбца) равна нулю, а сумма квадратов элементов любой строки (столбца) равна единице.*

Матрицы, элементы которых обладают указанным свойством, называются *ортогональными*.

Мы доказали тем самым, что *переход от одного ортонормированного базиса к другому в  $L_3$  задается ортогональной матрицей.*

Пусть теперь нам дана произвольная ортогональная матрица  $\Gamma = (\gamma_{i'i})$ . Векторы  $\mathbf{e}_{i'}$ , определяемые формулами (1), будут тогда, в силу свойств (6) ортогональной матрицы, попарно ортогональными и единичными. Поэтому *всякая ортогональная матрица служит матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому.*

Рассмотрим определитель ортогональной матрицы  $\Gamma$ :

$$|\Gamma| = |\gamma_{i'i}| = \begin{vmatrix} \gamma_{1'1} & \gamma_{1'2} & \gamma_{1'3} \\ \gamma_{2'1} & \gamma_{2'2} & \gamma_{2'3} \\ \gamma_{3'1} & \gamma_{3'2} & \gamma_{3'3} \end{vmatrix}.$$

Поскольку строки определителя  $|\Gamma|$  составлены из координат векторов  $\mathbf{e}_{1'}$ ,  $\mathbf{e}_{2'}$ ,  $\mathbf{e}_{3'}$  относительно базиса  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , то  $|\Gamma|$  равен смешанному произведению векторов  $\mathbf{e}_{1'}$ ,  $\mathbf{e}_{2'}$ ,  $\mathbf{e}_{3'}$  (см. формулу в конце § 5):

$$|\Gamma| = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}).$$

Абсолютная величина этого смешанного произведения равна единице, так как она равна объему куба, построенного на векторах  $\mathbf{e}_{1'}$ ,  $\mathbf{e}_{2'}$ ,  $\mathbf{e}_{3'}$ .

Следовательно, определитель любой ортогональной матрицы равен  $\pm 1$ , причем из рассмотрений § 5 (см. стр. 25)

следует, что знак плюс или минус будет в зависимости от того, имеют ли базисы  $\{e_1, e_2, e_3\}$  и  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  одинаковую или противоположную ориентацию. В первом случае базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$  может быть совмещен с базисом  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  путем поворота вокруг точки  $O$ , во втором случае одного поворота оказывается недостаточно — к нему следует добавить еще отражение базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  относительно некоторой плоскости, проходящей через точку  $O$ .

Запишем еще формулы преобразования ортонормированного базиса для плоскости. Это преобразование представляет собой либо чистый поворот на некоторый угол  $\alpha$  вокруг начала координат  $O$ , либо поворот на угол  $\alpha$  с последующим отражением относительно некоторой прямой, проходящей через начало координат. В первом случае формулы преобразования базиса запишутся в виде

$$e_1' = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2,$$

$$e_2' = -\sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_2$$

и матрица  $\Gamma$  запишется так:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы будет равен единице. Во втором случае формулы преобразования базиса будут выглядеть так:

$$e_1' = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2,$$

$$e_2' = \sin \alpha e_1 - \cos \alpha e_2,$$

и определитель матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

будет равен  $-1$ .

2. Пусть теперь в пространстве задан вектор  $x$ . Он представляет собой некоторый геометрический или физический объект, заданный как по величине, так и по направлению (например, силу, скорость, ускорение, напряженность электрического поля и т. п.). Этот реально существующий объект не зависит от того, в какой системе координат мы его рассматриваем. Любые действия или вычисления, проводимые



непосредственно над векторами, можно, таким образом, всегда физически истолковать.

Наряду с исчислением, связанным непосредственно с векторами, большую роль в геометрии и ее приложениях играет координатный метод, применение которого позволяет изучать геометрические образы не непосредственно, а достаточно хорошо развитыми методами алгебры (в аналитической геометрии) и анализа (в дифференциальной геометрии). На этом пути удастся довольно легко получить много результатов, непосредственное доказательство которых иногда вообще невозможно, а иногда очень громоздко.

Однако при применении координатного метода мы с каждым вектором  $x$  связываем его координаты  $x_1, x_2, x_3$ , которые зависят уже не только от самого вектора  $x$ , но и от рассматриваемой координатной системы (ортонормированного базиса). Такие ортонормированные базисы можно выбирать различными способами: например, выбрав один базис и поворачивая его вокруг начала, можно получить из него другие. Тем самым при применении координатного метода мы получаем данные, отражающие не только геометрическую картину, но и произвол выбора координатной системы. Например, сами координаты вектора, конечно, зависят от координатной системы, но сумма их квадратов (которая, как мы знаем, дает квадрат длины вектора) уже не должна зависеть от выбора координатной системы. (Немного ниже мы увидим, что эта величина оказывается одинаковой во всех ортонормированных базисах.)

Свойства геометрических или физических объектов, не зависящие от выбора системы координат, в которой эти объекты рассматриваются, называются их *инвариантными* свойствами. Только такие свойства и представляют интерес для изучения.

Основная задача тензорного исчисления как раз и заключается в том, чтобы *научиться отделять результаты, относящиеся к самим геометрическим объектам, от того, что привнесено случайным выбором координатной системы.*

Для этой цели прежде всего выясним, как преобразуются координаты вектора  $x$  при переходе от ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  с началом в  $O$  к другому ортонормированному базису  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  с тем же началом  $O$ . Запишем

разложения вектора  $x$  в каждом из этих двух базисов:

$$x = x_i e_i, \quad x = x_{i'} e_{i'}.$$

Поскольку это — разложения одного и того же вектора, мы можем приравнять правые части этих равенств:

$$x_i e_i = x_{i'} e_{i'}.$$

Заменяя векторы  $e_i$  по формулам (3), получим

$$x_i \gamma_{i' i} e_{i'} = x_{i'} e_{i'},$$

откуда, в силу линейной независимости векторов  $e_{i'}$ , следует, что

$$x_{i'} = x_i \gamma_{i' i};$$

учитывая, что  $\gamma_{i' i} = \gamma_{i' i}$ , запишем полученное равенство в виде

$$x_{i'} = \gamma_{i' i} x_i. \quad (7)$$

Эти формулы дают выражение новых координат вектора  $x$  через старые.

Если бы в равенстве  $x_i e_i = x_{i'} e_{i'}$  мы заменяли векторы  $e_{i'}$  по формулам (1), то получили бы выражение старых координат вектора  $x$  через новые:

$$x_i = \gamma_{i i'} x_{i'}. \quad (8)$$

Отметим, что формулы (8) можно получить из формул (7), если умножить обе части (7) на  $\gamma_{i i'}$ , просуммировать по  $i'$  и воспользоваться равенствами (6).

Теперь мы можем выяснить, какие из проведенных нами в этой главе рассуждений имеют инвариантный характер, т. е. не зависят от выбора системы координат.

Начнем со скалярного произведения векторов. В пространстве  $L_3$  оно было определено геометрически (стр. 19), и поэтому инвариантность его не вызывает сомнений. Убедимся в этом еще раз, показав, что полученное в § 4 выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов в некотором ортонормированном базисе обладает свойством инвариантности. Это важно потому, что в  $L_n$  скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе определяется как сумма произведений одноименных координат (см. упражнения § 4) и там доказательство его инвариантности уже не может носить геометрического

характера и должно быть обязательно проведено аналитически, например так, как мы сейчас будем это делать в  $L_3$ .

В § 4 доказано, что скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$ , имеющих в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  координаты  $x_i$  и  $y_i$ , а в базисе  $\{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}\}$  — координаты  $x_{i'}$ ,  $y_{i'}$ , можно записать в виде  $x_i y_i$  в первом базисе и  $x_{i'} y_{i'}$  — во втором.

Покажем тождественность этих выражений. Действительно, пользуясь формулами (7) и (6), получим

$$x_{i'} y_{i'} = \gamma_{i'i} x_i \gamma_{i'j} y_j = \delta_{ij} x_i y_j = x_i y_i.$$

Из инвариантности формулы для вычисления скалярного произведения немедленно следует инвариантность формул для вычисления длины вектора и косинуса угла между двумя векторами, так как эти величины выражаются через скалярное произведение векторов.

Прежде чем доказывать инвариантность формул, по которым вычисляются векторное и смешанное произведения векторов через координаты сомножителей, посмотрим, как изменятся компоненты кососимметричного символа Кронекера при переходе к новому базису. В новом базисе мы получим

$$\varepsilon_{i'j'k'} = (e_{i'}, e_{j'}, e_{k'}),$$

и так как

$$e_{i'} = \gamma_{i'i} e_i, \quad e_{j'} = \gamma_{j'j} e_j, \quad e_{k'} = \gamma_{k'k} e_k,$$

то

$$\varepsilon_{i'j'k'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{k'k} \varepsilon_{ijk}.$$

В частности,

$$\varepsilon_{1'2'3'} = \gamma_{1'i} \gamma_{2'j} \gamma_{3'k} \varepsilon_{ijk}.$$

Но в этой сумме отличными от нуля будут только шесть членов, которые можно переписать так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1'2'3'} = & (\gamma_{1'1} \gamma_{2'2} \gamma_{3'3} + \gamma_{1'2} \gamma_{2'3} \gamma_{3'1} + \gamma_{1'3} \gamma_{2'1} \gamma_{3'2} - \\ & - \gamma_{1'2} \gamma_{2'1} \gamma_{3'3} - \gamma_{1'3} \gamma_{2'2} \gamma_{3'1} - \gamma_{1'1} \gamma_{2'3} \gamma_{3'2}) \varepsilon_{123}. \end{aligned}$$

Стоящее в скобках выражение представляет собой определитель матрицы  $\Gamma$ , так что

$$\varepsilon_{1'2'3'} = |\Gamma| \varepsilon_{123}$$

или, если обозначить через  $\varepsilon'$  значение величины  $\varepsilon$  в новом базисе,

$$\varepsilon' = |\Gamma| \varepsilon.$$

Эта формула показывает, что если ориентация базиса не меняется, то не меняется и величина  $\varepsilon$ , если же ориентация базиса меняется на противоположную, то величина  $\varepsilon$  меняет знак, т. е. эта формула согласуется с определением величины  $\varepsilon$ .

Пусть теперь  $z = x \times y$ . Тогда в старом базисе

$$z_k = \varepsilon_{ijk} x_i y_j, \quad (9)$$

а в новом базисе

$$z_{k'} = \varepsilon_{i'j'k'} x_{i'} y_{j'}. \quad (9')$$

Покажем инвариантность этой формулы, т. е. покажем, что формула (9) переходит в (9') при преобразовании базиса. В самом деле, подставляя выражения

$$x_i = \gamma_{ii'} x_{i'}, \quad y_j = \gamma_{jj'} y_{j'}, \quad z_k = \gamma_{kk'} z_{k'}$$

в первую формулу, получим

$$\gamma_{kk'} z_{k'} = \varepsilon_{ijk} \gamma_{ii'} \gamma_{jj'} x_{i'} y_{j'}.$$

Умножим эти соотношения на  $\gamma_{kl'}$  и просуммируем по индексу  $k$ . Так как

$$\gamma_{kk'} \gamma_{kl'} = \delta_{k'l'},$$

то

$$z_{l'} = \varepsilon_{ijk} \gamma_{ii'} \gamma_{jj'} \gamma_{kl'} x_{i'} y_{j'},$$

а поскольку

$$\varepsilon_{ijk} \gamma_{ii'} \gamma_{jj'} \gamma_{kl'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{l'l} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{i'j'l'},$$

полученная формула совпадает с формулой (9').

Аналогично можно доказать, что вычислительная формула для смешанного произведения, полученная в § 5, также остается инвариантной при преобразовании базиса, т. е.

$$\varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k = \varepsilon_{i'j'k'} x_{i'} y_{j'} z_{k'}.$$

Заметим, что инвариантность формулы для смешанного произведения следует из того, что

$$(x, y, z) = (x \times y) z,$$

а векторное и скалярное произведения векторов, как мы только что доказали, выражаются инвариантными формулами.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть в пространстве  $L_2$  даны два ортонормированных базиса  $\{e_1, e_2\}$  и  $\{e_1', e_2'\}$ . Написать выражение векторов одного базиса через векторы другого и формулы преобразования координат произвольного вектора при переходе от первого базиса ко второму, если

а) векторы второго базиса получены из векторов первого поворотом на угол  $\alpha$  и перенумерацией базисных векторов;

б)  $e_1' = -e_1, e_2' = e_2$ .

2. Написать матрицу  $\Gamma$  перехода от ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  пространства  $L_3$  к другому ортонормированному базису  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ , если

а)  $e_1' = e_2, e_2' = e_1, e_3' = e_3$ ; б)  $e_1' = e_3, e_2' = e_1, e_3' = e_2$ .

3. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если

а) поменять местами два вектора первого базиса?

б) поменять местами два вектора второго базиса?

в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

4. Пусть в пространстве  $L_3$  даны два правых ортонормированных базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  и  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ . Расположение второго базиса относительно первого можно определить с помощью трех углов Эйлера, заданных следующим образом:

а) Угол наклонения  $\theta$  — угол между векторами  $e_3$  и  $e_3'$ ; он определяется по формуле

$$\cos \theta = e_3 e_3'.$$

б) Угол  $\varphi$  — угол между векторами  $e_1$  и  $u$ , где  $u$  — единичный вектор, лежащий на линии узлов — линии пересечения плоскостей  $(e_1, e_2)$  и  $(e_1', e_2')$ , причем  $u, e_3$  и  $e_3'$  образуют правую тройку. Этот вектор  $u$  определяется формулой

$$u = \frac{e_3 \times e_3'}{\sin \theta} = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi.$$

в) Угол  $\psi$  — угол между векторами  $u$  и  $e_1'$ .

Найти выражение векторов второго базиса через векторы первого с помощью углов  $\theta, \varphi, \psi$ .

5. Доказать, что матрицы

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

являются ортогональными.

Все сказанное в § 3 о замене базиса в пространстве  $L_n$  верно и для любого линейного пространства  $L_n$ . Соответствующие формулы для  $L_n$  получаются, если считать, что индексы  $i, j, k, i', j', k'$  принимают значения не 1, 2, 3, а 1, 2, ...,  $n$ .

6. Вектор  $x$  пространства  $L_n$  относительно ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  имеет координаты  $x_1, \dots, x_n$ . Как выбрать в  $L_n$  новый базис, чтобы относительно него координатами вектора  $x$  стали числа  $0, \dots, 0, |x|$ ?

7. Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис пространства  $L_n$  и  $L_k$  — некоторое подпространство  $L_n$  размерности  $k$ . Доказать, что  $L_k$  может быть задано как совокупность всех векторов  $x \in L_n$ , координаты  $x_i$  которых относительно базиса  $\{e_1, \dots, e_n\}$  удовлетворяют системе уравнений вида

$$a_{ij}x_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

8. В пространстве многочленов степени, не превосходящей  $n$  (см. пример  $e$ ) § 1, а также упр. 5 § 2, упр. 2 § 3), написать матрицу перехода от базиса  $1, t, \dots, t^n$  к базису  $1, (t-a), \dots, (t-a)^n$ . Записать формулы преобразования координат произвольного многочлена при такой замене базиса.

## § 7. Некоторые вопросы аналитической геометрии в пространстве

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы аналитической геометрии в пространстве, чтобы, во-первых, напомнить ряд необходимых для дальнейшего сведений и, во-вторых, чтобы записать получающиеся уравнения в сокращенных обозначениях (ибо именно в таком виде мы будем пользоваться этими формулами в дальнейшем).

Пусть  $O$  — фиксированная точка евклидова пространства. Тогда каждой точке  $M$  этого пространства может быть поставлен в соответствие вектор  $\overline{OM} = x$  — радиус-вектор этой точки. Положение точки  $M$  вполне определяется, если задан ее радиус-вектор  $x$  (при заданном начале отсчета  $O$ ). Таким образом, если задано начало отсчета  $O$ , то *между векторами линейного пространства  $L_3$  и точками евклидова пространства устанавливается взаимно однозначное соответствие*. Координаты  $x_i$  вектора  $x$  по отношению к ортонормированному базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$  будут координатами точки  $M$  по отношению к прямоугольной декартовой системе координат, начало которой расположено в точке  $O$  и оси которой направлены по векторам  $e_1, e_2, e_3$ .

Однако указанное соответствие между точками пространства и векторами сохраняется только в том случае, если остается неподвижной начальная точка  $O$ . Если же мы перейдем от нее к новой начальной точке  $O'$ , то радиусы-

векторы всех точек  $M$  изменятся. Пусть  $\overline{OM} = \mathbf{x}'$  — новый радиус-вектор точки  $M$  и  $\overline{OO'} = \mathbf{p}$ . Тогда соотношение, связывающее новый и старый радиус-векторы точки  $M$ , будет иметь вид (см. рис. 4)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{p}. \quad (1)$$

Рассмотрим две прямоугольные декартовы системы координат, начала которых расположены соответственно в точках  $O$  и  $O'$ , оси которых параллельны и определяются единичными взаимно ортогональными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Тогда по отношению к первой системе координаты точки  $M$  будут совпадать с координатами вектора  $\mathbf{x}$ , а по отношению ко второй — с координатами вектора  $\mathbf{x}'$ . Запишем разложения векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  и  $\mathbf{p}$  по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_i \mathbf{e}_i, & \mathbf{x}' &= x'_i \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{p} &= p_i \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Тогда в силу формулы (1), координаты этих векторов будут связаны соотношениями

$$x_i = x'_i + p_i. \quad (1')$$

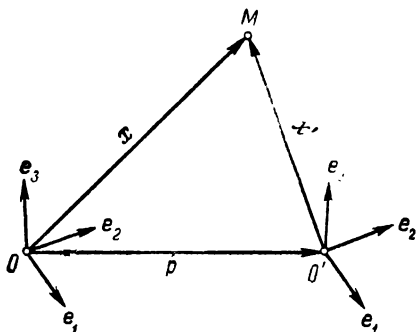


Рис. 4.

Полученные формулы показывают, как преобразуются координаты точки  $M$  при параллельном переносе системы координат.

Заметим, что при параллельном переносе системы координат координаты векторов не меняются, так как в этом случае не меняются базисные векторы.

Как мы уже говорили в предыдущем параграфе, все величины и уравнения, которые имеют какой-либо геометрический смысл, должны оставаться инвариантными (неизменными) при любых преобразованиях прямоугольной системы координат. Так как координаты векторов меняются только при изменении ортогонального базиса и не меняются при параллельном переносе осей координат, то при параллельном переносе оста-

нутя инвариантными любые величины, зависящие от координат векторов. Поэтому инвариантность таких величин следует проверять только относительно вращений системы координат. В противоположность этому величины, зависящие от координат точек, будут меняться не только при вращениях системы координат, но и при ее параллельных переносах. Поэтому инвариантность величин, зависящих от координат точек, следует проверять по отношению к обоим типам преобразований.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные вопросы аналитической геометрии в пространстве.

1. Расстояние между двумя точками и деление отрезка в данном отношении. Пусть  $M$  и  $N$  — две точки пространства и  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — их радиусы-векторы. Тогда  $\overline{MN} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$  и длина отрезка  $MN$  выразится следующим образом:

$$MN = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \sqrt{\delta_{ij}(y_i - x_i)(y_j - x_j)} = \\ = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}. \quad (2)$$

Инвариантность этого выражения по отношению к любым преобразованиям координат следует из того, что расстояние между точками  $M$  и  $N$  равно длине вектора  $\overline{MN}$ , которая, как мы видели, является неизменной при таких преобразованиях.

Точка  $P$ , делящая отрезок  $MN$  в отношении  $\lambda$ , так что  $\frac{MP}{PN} = \lambda$ , определяется радиусом-вектором  $\mathbf{z}$  таким, что

$$\mathbf{z} - \mathbf{x} = \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{z}),$$

откуда

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

Координаты этого вектора связаны с координатами векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  соотношениями

$$z_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda}. \quad (3')$$

При параллельном переносе системы координат, определяемом вектором  $\mathbf{p}$ , соотношение (3) принимает вид

$$\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{x}' + \lambda\mathbf{y}'}{1 + \lambda},$$



где

$$x = x' + p, \quad y = y' + p, \quad z = z' + p,$$

т. е. остается инвариантным.

2. Уравнение плоскости в пространстве. Пусть в пространстве задан ортонормированный базис из векторов  $e_1, e_2, e_3$  и произвольная плоскость  $\pi$ . Координаты вектора нормали  $n$  к этой плоскости обозначим через  $a_i$ :

$$n = a_i e_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Радиус-вектор  $x_0$  точки  $M_0$  плоскости  $\pi$  с координатами  $x_i^0$  можно записать в виде

$$x_0 = x_i^0 e_i,$$

а радиус-вектор  $x$  произвольной точки  $M$  плоскости  $\pi$  с координатами  $x_i$  — в виде

$$x = x_i e_i.$$

Тогда для вектора  $\overline{M_0 M}$  получим

$$\overline{M_0 M} = x - x_0 = (x_i - x_i^0) e_i. \quad (5)$$

Поскольку векторы  $\overline{M_0 M}$  и  $n$  перпендикулярны, имеем

$$\overline{M_0 M} \cdot n = 0,$$

или

$$(x - x_0) \cdot n = 0. \quad (6)$$

Полученное уравнение (6) является *уравнением плоскости в векторной форме*.

Используя (4), (5) и выражение скалярного произведения векторов через координаты векторов, получим отсюда

$$a_i (x_i - x_i^0) = 0$$

или, обозначая  $-a_i x_i^0$  через  $b$ ,

$$a_i x_i + b = 0. \quad (6')$$

Последнее уравнение может быть записано в виде

$$nx + b = 0.$$

Если плоскость  $\pi$  проходит через начало координат, то  $b = 0$  и ее уравнение имеет вид

$$a_i x_i = 0.$$

Пусть теперь плоскость  $\pi$  не проходит через начало координат. Тогда  $b \neq 0$ . Разделим все члены уравнения (6') на  $b$  и обозначим  $-\frac{a_i}{b}$  через  $u_i$ . Уравнение (6) примет вид

$$u_i x_i = 1.$$

Числа  $u_i$  называются *тангенциальными координатами плоскости*.

3. Расстояние от точки до плоскости. Пусть плоскость  $\pi$  в некотором ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  задана уравнением

$$a_i x_i + b = 0.$$

Единичный вектор нормали  $n_0$  к плоскости  $\pi$  можно записать в виде

$$n_0 = \frac{a_i e_i}{\sqrt{a_i a_i}}.$$

Рассмотрим произвольную точку пространства  $A_0$  с координатами  $x_i^0$  и точку  $M$  с координатами  $x_i$ , лежащую в плоскости  $\pi$ . Расстояние  $\delta$  от точки  $A_0$  до плоскости  $\pi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta &= |\text{Пр}_{n_0} \overline{MA_0}| = |\text{Пр}_{n_0} (x_i^0 - x_i) e_i| = \\ &= \frac{|(x_i^0 - x_i) a_i|}{\sqrt{a_i a_i}} = \frac{|a_i x_i^0 + b|}{\sqrt{a_i a_i}}. \end{aligned}$$

В частности, расстояние  $\delta_0$  начала координат  $O(0, 0, 0)$  от плоскости  $\pi$  равно

$$\delta_0 = \frac{|b|}{\sqrt{a_i a_i}}.$$

4. Уравнение прямой в пространстве. Пусть прямая в пространстве задана точкой  $M_0$ , радиус-вектор  $r_0$  которой имеет в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  координаты  $x_i^0$ , и направляющим вектором  $a = a_i e_i$ . Пусть

$$r = x_i e_i$$

— радиус-вектор произвольной точки  $M$  прямой. Поскольку векторы  $\overline{M_0 M}$  и  $a$  коллинеарны и

$$\overline{M_0 M} = r - r_0 = (x_i - x_i^0) e_i,$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 &= \lambda \mathbf{a}, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (7)$$

или, в координатной форме,

$$x_i = x_i^0 + \lambda a_{i1}. \quad (7')$$

В этих уравнениях  $\lambda$  — параметр, который может принимать любые действительные значения. Уравнения (7) представляет собой векторное уравнение прямой в пространстве, а уравнения (7') — ее параметрические уравнения.

5. Прямая как пересечение двух плоскостей. Пусть прямая задана как пересечение двух плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Тогда она определяется системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_i^{(1)} x_i + b^{(1)} &= 0, \\ a_i^{(2)} x_i + b^{(2)} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

здесь  $a_i^{(1)}$  и  $a_i^{(2)}$  — координаты нормальных векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Чтобы от уравнений (8) перейти к уравнениям (7'), надо найти какую-нибудь точку, лежащую на прямой; и направляющий вектор  $\mathbf{a}$  этой прямой. Вектор  $\mathbf{a}$  перпендикулярен векторам  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ ; поэтому в качестве вектора  $\mathbf{a}$  можно взять векторное произведение  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \varepsilon_{ijk} a_i^{(1)} a_j^{(2)} \mathbf{e}_k.$$

Для нахождения точки надо зафиксировать одну из координат  $x_i$  и затем решить систему (8) относительно двух других координат (фиксировать надо такую координату, чтобы после этого система (8) имела решение).

Пусть  $x_i^0$  — найденные указанным выше способом координаты точки прямой. Тогда уравнения прямой можно записать в виде

$$x_k = x_k^0 + \lambda \varepsilon_{ijk} a_i^{(1)} a_j^{(2)}.$$

6. Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости. В аналитической геометрии общее уравнение кривой второго порядка в декартовой системе координат на плоскости записывалось в виде

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (9)$$

Будем теперь обозначать координаты  $x$  и  $y$  буквами  $x_1$  и  $x_2$  и условимся считать, что коэффициент при произведении  $x_i x_j$  равен  $a_{ij}$ , коэффициент при  $x_i$  равен  $a_i$ , а свободный член равен  $a$ . Тогда уравнение (9) перепишется в виде

$$a_{ij}x_i x_j + 2a_i x_i + a = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (10)$$

причем  $a_{ij} = a_{ji}$ . Здесь в первом слагаемом суммирование происходит по двум индексам  $i$  и  $j$ . Если первое слагаемое записать подробно, то получим

$$\begin{aligned} a_{ij}x_i x_j &= a_{11}(x_1)^2 + a_{12}x_1 x_2 + a_{21}x_2 x_1 + a_{22}(x_2)^2 = \\ &= a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1 x_2 + a_{22}(x_2)^2. \end{aligned}$$

Поэтому в полной записи уравнение (10) примет вид

$$a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1 x_2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + a = 0, \quad (10')$$

т. е. мы видим, что оно идентично уравнению (9). Напомним, что условие

$$a_i = 0$$

означает, что кривая второго порядка — центральная и начало координат помещено в ее центре симметрии, а условия

$$a = 0, \quad a_i = 0$$

означают, что кривая второго порядка распадается на две пересекающиеся прямые, проходящие через начало координат.

7. Уравнение поверхности второго порядка в пространстве. Общее уравнение поверхности второго порядка относительно декартовой системы координат записывается в виде

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \\ + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0. \end{aligned}$$

Если воспользоваться обозначениями, аналогичными тем, которые мы только что ввели для кривой второго порядка, то это уравнение в сокращенных обозначениях примет вид

$$a_{ij}x_i x_j + 2a_i x_i + a = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (11)$$

где  $a_{ij} = a_{ji}$ . Мы видим, что уравнения (10) и (11) записаны совершенно одинаково, разница между ними состоит только

в том, что индексы суммирования в (10) принимают значения 1, 2, а в (11) — значения 1, 2, 3.

Снова условие

$$a_i = 0$$

означает, что поверхность второго порядка — центральная и начало координат помещено в ее центре симметрии, а условия

$$a_i = 0, \quad a = 0$$

означают, что поверхность второго порядка представляет собой конус второго порядка с вершиной в начале координат, который, в частности, может распадаться на две пересекающиеся или совпадающие плоскости.

8. Определение центра кривой и поверхности второго порядка. Поскольку уравнения кривой и поверхности второго порядка в сокращенных обозначениях выглядят одинаково, многие вопросы для них можно изложить совместно, надо лишь твердо помнить, что для кривой индексы суммирования принимают два, а для поверхности — три значения.

Рассмотрим в качестве примера вопрос об определении центра кривой и поверхности второго порядка.

Пусть нам дано уравнение

$$a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0.$$

Предположим, что это уравнение определяет центральную кривую или поверхность второго порядка с центром  $O$ . Произведем параллельный перенос прямоугольной системы координат, совместив новое начало  $O'$  с центром; пусть  $\mathbf{p}$  — радиус-вектор, определяющий положение начала  $O'$  новой системы координат,  $\overline{OO'} = \mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ . Тогда старые координаты  $x_i$  и новые координаты  $x'_i$  точки  $M$  будут связаны соотношениями (1'):

$$x_i = x'_i + p_i.$$

Подставляя эти значения  $x_i$  в уравнение (11), мы получим, что в новой системе координат уравнение (11) примет вид

$$a_{ij}(x'_i + p_i)(x'_j + p_j) + 2a_i(x'_i + p_i) + a = 0$$

или

$$a_{ij}x'_ix'_j + a_{ij}x'_ip_j + a_{ij}x'_ip_i + a_{ij}p_ip_j + 2a_ix'_i + 2a_ip_i + a = 0.$$

Если в третьем слагаемом заменить индекс суммирования  $i$  на  $j$ , а  $j$  на  $i$  и учесть, что  $a_{ij} = a_{ji}$ , то получим

$$a_{ij}x_i x_j + 2(a_{ij}p_j + a_i)x_i + a_{ij}p_i p_j + 2a_i p_i + a = 0.$$

Поскольку новое начало — центр, мы должны иметь

$$a_{ij}p_j = -a_i. \quad (12)$$

Координаты центра  $p_j$  обязаны удовлетворять системе (12). Для того чтобы центр существовал, необходимо и достаточно, чтобы эта система имела решение, т. е. чтобы ее определитель (он будет второго порядка для кривой и третьего — для поверхности) был отличен от нуля.

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить векторное и координатные уравнения плоскости, а) проходящей через две данные пересекающиеся прямые

$$r = r_1 + \lambda a, \quad r = r_1 + \mu b;$$

б) проходящей через прямую  $r = r_1 + \lambda a$  и точку  $A_0$  с радиусом-вектором  $r_0$ .

2. Записать необходимые и достаточные условия параллельности и пересечения двух плоскостей

$$a_i^{(1)}x_i + b^{(1)} = 0,$$

$$a_i^{(2)}x_i + b^{(2)} = 0.$$

3. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями

$$a_i x_i + b = 0,$$

$$a_i x_i + b' = 0.$$

4. Записать уравнение плоскости, параллельной плоскостям

$$a_i x_i + b = 0,$$

$$a_i x_i + b' = 0$$

и проходящей посередине между ними.

5. Написать уравнение пучка плоскостей, определяемого плоскостями

$$a_i^{(1)}x_i + b^{(1)} = 0,$$

$$a_i^{(2)}x_i + b^{(2)} = 0. \quad (*)$$

6. В пучке плоскостей, определяемом плоскостями (\*), найти плоскость,

а) проходящую, через точку  $A_0$  с координатами  $x_i^0$ ;

б) перпендикулярную плоскости

$$a_i^{(8)}x_i + b^{(8)} = 0.$$

7. Найти угол между плоскостями (\*). В каком случае плоскости ортогональны?

8. Написать уравнения плоскостей, которые принадлежат пучку (\*) и делят пополам угол между определяющими этот пучок плоскостями.

9. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки  $A_0(x_i^0)$  на плоскость

$$a_i x_i + b = 0.$$

10. Найти площадь треугольника с вершинами в точках  $A(x_i)$ ,  $B(y_i)$ ,  $C(z_i)$ .

11. Найти объем тетраэдра с вершинами в точках  $A(x_i)$ ,  $B(y_i)$ ,  $C(z_i)$ ,  $D(u_i)$ .

12. Найти расстояние от точки  $M$ , определяемой радиусом-вектором  $y$ , до прямой

$$x = x_0 + \lambda a.$$

13. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$x = x_1 + \lambda a,$$

$$x = x_2 + \mu a.$$

14. Даны две скрещивающиеся прямые

$$x = x_1 + \lambda a_1,$$

$$x = x_2 + \mu a_2.$$

Найти

а) угол между этими прямыми;

б) кратчайшее расстояние между ними.

## ГЛАВА II

### ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ И ТЕНЗОРЫ

#### § 1. Линейные формы

1. В предыдущей главе мы рассмотрели основные операции векторной алгебры. Теперь мы будем изучать простейшие скалярные функции одного или нескольких векторных аргументов.

Говорят, что в линейном пространстве  $L$  задана скалярная функция  $\varphi = \varphi(x)$  векторного аргумента  $x$ , если каждому вектору  $x$  пространства  $L$  поставлено в соответствие некоторое число  $\varphi$ . Эта функция называется *линейной функцией*, или *линейной формой*, если она обладает следующими двумя свойствами:

- 1)  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ;
- 2)  $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ .

Рассмотрим некоторые примеры линейных функций.

а) Обозначим через  $\text{Pr}_l x$  величину проекции вектора  $x$  на ось  $l$ .  $\text{Pr}_l x$  является линейной формой вектора  $x$ , так как из аналитической геометрии известно, что

$$\text{Pr}_l(x + y) = \text{Pr}_l x + \text{Pr}_l y, \quad \text{Pr}_l(\lambda x) = \lambda \text{Pr}_l x.$$

б) Пусть  $a$  — постоянный, а  $x$  — переменный векторы пространства  $L$ . Тогда их скалярное произведение  $\varphi = ax$  является линейной формой вектора  $x$ . В самом деле, в силу свойств скалярного произведения векторов (гл. I, стр. 20)

$$a(x + y) = ax + ay \quad \text{и} \quad a(\lambda x) = \lambda(ax).$$

в) Так как координата  $x_i$  вектора  $x$  пространства  $L_3$  по отношению к ортонормированному базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$  может быть представлена в виде  $x_i = e_i x$  (см. стр. 21), то она также является линейной формой вектора  $x$ .



2) Пусть  $a$  и  $b$  — два неколлинеарных вектора пространства  $L_3$ . Тогда смешанное произведение  $(a, b, x)$  является линейной формой вектора  $x$ , так как в силу свойств смешанного произведения (гл. I, § 5, стр. 29)

$$(a, b, x + y) = (a, b, x) + (a, b, y) \quad \text{и} \quad (a, b, \lambda x) = \lambda(a, b, x).$$

Найдем теперь выражение линейной формы  $\varphi = \varphi(x)$  в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Так как

$$x = x_i e_i$$

и функция  $\varphi$  линейная, то

$$\varphi(x) = \varphi(x_i e_i) = x_i \varphi(e_i).$$

Обозначим числа  $\varphi(e_i)$  буквами  $a_i$ :

$$\varphi(e_i) = a_i,$$

тогда линейная форма  $\varphi$  запишется в виде

$$\varphi(x) = a_i x_i. \quad (1)$$

Это выражение представляет собой однородный многочлен первой степени от переменных  $x_i$ , поэтому-то линейная функция и называется линейной формой. Коэффициенты  $a_i$  в этом выражении зависят от выбора базиса.

2. Посмотрим, как преобразуются коэффициенты линейной формы  $\varphi = \varphi(x)$  при переходе от ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  к новому ортонормированному базису  $\{e_{i'}, e_{2'}, e_{3'}\}$ . При таком преобразовании

$$e_{i'} = \gamma_{i' i} e_i,$$

где  $\Gamma = (\gamma_{i' i})$  — матрица перехода от старого базиса к новому (гл. I, стр. 33). В новом базисе форма  $\varphi$  запишется в виде

$$\varphi = a_{i'} x_{i'},$$

где  $x_{i'}$  — новые координаты вектора  $x$ , а коэффициенты  $a_{i'}$  вычисляются по формулам

$$a_{i'} = \varphi(e_{i'}) = \varphi(\gamma_{i' i} e_i) = \gamma_{i' i} \varphi(e_i) = \gamma_{i' i} a_i.$$

Следовательно, коэффициенты линейной формы  $\varphi$  при переходе от старого базиса к новому изменяются по закону

$$a_{i'} = \gamma_{i' i} a_i.$$

Но, сравнивая эти формулы с формулами (7) § 6 предыдущей главы, мы видим, что закон изменения коэффициентов линейной формы при переходе к новому базису в точности совпадает с законом изменения координат вектора. Теперь легко видеть, что

$$a_i e_i = a_i e_{i'},$$

и поэтому коэффициенты  $a_i$  линейной формы  $\varphi$  являются координатами некоторого вектора

$$a = a_i e_i.$$

Формула (1) показывает, что сама *линейная форма*  $\varphi = \varphi(x)$  *всегда может быть записана в виде скалярного произведения векторов  $a$  и  $x$ :*

$$\varphi(x) = ax.$$

Выясним теперь геометрический смысл вектора  $a$ . Для этого рассмотрим поверхности уровня линейной формы  $\varphi$ . Эти поверхности определяются уравнением  $\varphi = c$  или

$$ax = c.$$

Но это уравнение есть уравнение семейства параллельных плоскостей, для которых вектор  $a$  является нормальным вектором. Следовательно, вектор  $a$  — это общий нормальный вектор к плоскостям, являющимся поверхностями уровня формы  $\varphi$ .

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, будут ли линейными формами следующие скалярные функции векторного аргумента:

а) Функция

$$\varphi(x) = c_i x_i,$$

где  $x_i$  — координаты вектора  $x$  относительно некоторого базиса пространства  $L_n$ ,  $c_i$  — фиксированные числа.

б) Функция

$$\varphi(x) = x_1^2,$$

где  $x_1$  — первая координата вектора  $x$  в некотором базисе пространства  $L_n$ .

в) Функция

$$\varphi(x) = a.$$

г) Функция

$$\varphi[g(t)] = g(t_0), \quad a < t_0 < b,$$

заданная в пространстве  $C[a, b]$  (см. пример ж) гл. I, стр. 9).

д) Функция

$$\varphi[g(t)] = \int_a^b c(t) g(t) dt,$$

заданная в том же пространстве  $C[a, b]$ , где  $c(t)$  — произвольная непрерывная функция.

2. Записать в виде  $\varphi(x) = ax$  линейные формы примеров а) и г) § 1.

## § 2. Билинейные формы

1. Скалярная функция  $\varphi = \varphi(x, y)$  двух векторных аргументов  $x$  и  $y$  называется *билинейной функцией*, или *билинейной формой*, если она линейна по каждому своему аргументу, т. е. если

$$1) \varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y);$$

$$2) \varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y);$$

$$3) \varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2);$$

$$4) \varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y).$$

Приведем три примера билинейных форм.

а) Скалярное произведение  $xu$  векторов  $x$  и  $y$  является билинейной формой, так как оно обладает всеми перечисленными выше свойствами.

б) Пусть  $a$  — постоянный вектор, а  $x$  и  $y$  — переменные векторы. Смешанное произведение  $(a, x, y)$ , как легко проверить, также является билинейной формой.

в) Пусть  $\varphi(x)$  и  $\psi(y)$  — линейные формы переменных векторов  $x$  и  $y$ . Их произведение  $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  является билинейной формой, так как

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2, y) &= \varphi(x_1 + x_2)\psi(y) = \varphi(x_1)\psi(y) + \varphi(x_2)\psi(y) = \\ &= f(x_1, y) + f(x_2, y), \end{aligned}$$

$$f(\lambda x, y) = \varphi(\lambda x)\psi(y) = \lambda \varphi(x)\psi(y) = \lambda f(x, y),$$

и аналогично для второго аргумента.

2. Отнесем теперь линейное пространство  $L_3$  к прямоугольной декартовой системе координат с базисом  $\{e_1, e_2, e_3\}$  и найдем выражение билинейной формы  $\varphi = \varphi(x, y)$  в этой системе координат. Мы имеем в ней

$$x = x_i e_i, \quad y = y_j e_j,$$

и так как функция  $\varphi$  линейна относительно обоих своих переменных, то

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_i e_i, y_j e_j) = x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

Обозначим значения билинейной формы  $\varphi$  от базисных векторов через  $a_{ij}$ :

$$\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}.$$

Билинейная форма  $\varphi$  теперь запишется в виде

$$\varphi = a_{ij} x_i y_j$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} \varphi = & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + \\ & + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_2y_3 + a_{31}x_3y_1 + a_{32}x_3y_2 + a_{33}x_3y_3. \end{aligned}$$

Это выражение линейно относительно двух рядов переменных  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(y_1, y_2, y_3)$ .

Коэффициенты билинейной формы могут быть записаны в виде таблицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

которая, как мы знаем (гл. I, стр. 33), называется квадратной матрицей третьего порядка. Будем называть эту матрицу *матрицей билинейной формы*  $\varphi$ .

Таким образом, в пространстве  $L_3$  билинейной форме  $\varphi$  соответствует в каждом базисе определенная матрица третьего порядка.

Посмотрим, как запишутся в координатной форме рассмотренные выше билинейные формы, и найдем их матрицы.

а) Билинейная форма  $xu$  в ортонормированном базисе записывается в виде

$$xu = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Следовательно, ее матрица выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}).$$

б) Рассмотрим билинейную форму  $(a, x, y)$ . Вспомнив, как выражается смешанное произведение векторов в координатной форме (гл. I, стр. 29), получим

$$(a, x, y) = \varepsilon_{kij} a_k x_i y_j$$

(здесь, по сравнению со стр. 29, изменено обозначение индексов суммирования). Поэтому матрица коэффициентов этой формы имеет вид

$$(\varepsilon_{kij} a_k) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_3 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

в) В ортонормированном базисе  $(e_1, e_2, e_3)$  линейные формы  $\varphi(x)$  и  $\psi(y)$  можно (см. § 1) записать в виде

$$\varphi = a_i x_i, \quad \psi = b_j y_j.$$

Билинейная форма  $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  теперь имеет вид

$$f = (a_i x_i)(b_j y_j) = a_i b_j x_i y_j.$$

Матрица этой билинейной формы будет выглядеть так:

$$A = (a_i b_j) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

3. Рассмотрим, как преобразуются коэффициенты билинейной формы  $\varphi = \varphi(x, y)$  при преобразовании базиса. В новом базисе  $(e_1', e_2', e_3')$  эта билинейная форма запишется в виде

$$\varphi = a_{i'j'} x_{i'} y_{j'},$$

где

$$a_{i'j'} = \varphi(e_{i'}, e_{j'}).$$

Но при переходе к новому базису

$$e_{i'} = \gamma_{i'i} e_i.$$

Поэтому, используя основные свойства билинейной формы, получим

$$a_{i'j'} = \varphi(\gamma_{i'i} e_i, \gamma_{j'j} e_j) = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \varphi(e_i, e_j) = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} a_{ij}.$$

Следовательно, при переходе к новому базису коэффициенты билинейной формы преобразуются по закону

$$a_{i'j'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} a_{ij}. \quad (1)$$

Сравнивая эти формулы с формулами преобразования коэффициентов линейной формы, мы видим, что обе эти группы формул устроены аналогичным образом.

Докажем теперь обратное: *если элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A$  при преобразовании базиса пространства  $L_3$  преобразуются по закону (1), то этой матрице отвечает билинейная форма.*

Пусть  $\{e_1, e_2, e_3\}$  и  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  — два базиса в пространстве  $L_3$  и  $x$  и  $y$  — два его произвольных вектора. Тогда

$$x = x_i e_i = x_{i'} e_{i'}, \quad y = y_j e_j = y_{j'} e_{j'}.$$

Рассмотрим билинейное выражение  $\varphi = a_{ij} x_i y_j$ . Чтобы доказать, что это выражение действительно является билинейной формой в пространстве  $L_3$ , следует доказать, что оно не меняется при преобразовании базиса, т. е. что его величина зависит только от выбора векторов  $x$  и  $y$ , но не зависит от выбора базиса. После преобразования базиса это выражение перейдет в выражение  $\varphi' = a_{i'j'} x_{i'} y_{j'}$ . Следовательно, мы должны доказать, что  $\varphi = \varphi'$ . В самом деле, из соотношений (1) и (7) § 6 гл. I следует, что

$$\varphi' = a_{i'j'} x_{i'} y_{j'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} a_{ij} \gamma_{i'k} x_k \gamma_{j'l} y_l = \gamma_{i'i} \gamma_{i'k} \gamma_{j'j} \gamma_{j'l} a_{ij} x_k y_l.$$

Но в силу свойств ортогональной матрицы (см. формулы (6) на стр. 34)

$$\gamma_{i'i} \gamma_{i'k} = \delta_{ik}, \quad \gamma_{j'j} \gamma_{j'l} = \delta_{jl}.$$

Поэтому

$$\varphi' = \delta_{ik} \delta_{jl} a_{ij} x_k y_l.$$

Но

$$\delta_{ik} x_k = x_i, \quad \delta_{jl} y_l = y_j,$$

вследствие чего

$$\varphi' = a_{ij} x_i y_j = \varphi,$$

что и требовалось доказать.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что коэффициенты билинейной формы на плоскости  $L_2$  можно записать в виде квадратной матрицы второго порядка.

2. Записать смешанное произведение  $(a, x, y)$  (см. пример б)) в виде определителя третьего порядка и, вычисляя этот определитель, еще раз подсчитать коэффициенты билинейной формы

$$\varphi(x, y) = (a, x, y).$$

3. Доказать, что функция

$$\varphi[f(x), g(y)] = \int_a^b \int_a^b K(x, y) f(x) g(y) dx dy,$$

определенная в пространстве  $C[a, b]$  (см. пример ж) § 1 гл. I), является билинейной формой; здесь  $K(x, y)$  — фиксированная непрерывная функция переменных  $x$  и  $y$ .

4. Доказать, что функция

$$\varphi[f(x), g(y)] = f(x_0) g(y_0), \quad a < x_0 < b, \quad a < y_0 < b,$$

будет билинейной формой пространства  $C[a, b]$ .

5. Будет ли билинейной формой пространства  $L_n$  функция  $\varphi(x, y) = x_1^2 y_1$ , где  $x_1, y_1$  — первые координаты векторов  $x$  и  $y$  в некотором базисе?

6. Будет ли билинейной формой в линейном пространстве функция  $\varphi(x, y) = a$ , где  $a$  — фиксированное действительное число?

### § 3. Полилинейные формы. Общее определение тензора

1. Рассмотрим теперь в линейном пространстве  $L_3$  скалярную функцию от  $p$  векторных аргументов — функцию  $\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w)$ . Эта функция называется *полилинейной функцией*, или *полилинейной формой*, если она линейна по каждому из своих аргументов, т. е. если для каждого из аргументов выполнены условия вида

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi(x, y, z_1 + z_2, \dots, w) &= \\ &= \varphi(x, y, z_1, \dots, w) + \varphi(x, y, z_2, \dots, w); \end{aligned}$$

$$2) \quad \varphi(x, y, \lambda z, \dots, w) = \lambda \varphi(x, y, z, \dots, w).$$

Число аргументов  $p$  называется *степенью* полилинейной формы  $\varphi$ . Форма  $\varphi$  называется также  *$p$ -линейной формой*.

Рассмотренные в § 1 линейные формы являются частным случаем полилинейных форм. Они будут формами первой степени, 1-линейными формами. Билинейные формы, рассмотренные в предыдущем параграфе, также являются частным

случае полилинейных форм. Степень билинейных форм равна двум. Рассмотрим еще некоторые примеры полилинейных форм степени большей чем два.

а) Смешанное произведение векторов  $(x, y, z)$  является трилинейной формой, так как для каждого из ее аргументов будут выполнены свойства 1) и 2).

б) Произведение трех линейных форм  $\alpha(x)$ ,  $\beta(y)$  и  $\gamma(z)$  представляет собой трилинейную форму. В самом деле, если

$$\varphi(x, y, z) = \alpha(x) \beta(y) \gamma(z),$$

то

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2, y, z) &= \alpha(x_1 + x_2) \beta(y) \gamma(z) = \\ &= [\alpha(x_1) + \alpha(x_2)] \beta(y) \gamma(z) = \alpha(x_1) \beta(y) \gamma(z) + \alpha(x_2) \beta(y) \gamma(z) = \\ &= \varphi(x_1, y, z) + \varphi(x_2, y, z), \\ \varphi(\lambda x, y, z) &= \alpha(\lambda x) \beta(y) \gamma(z) = \lambda \alpha(x) \beta(y) \gamma(z) = \lambda \varphi(x, y, z), \end{aligned}$$

и аналогично для остальных аргументов.

2. Рассмотрим, как запишется полилинейная форма  $\varphi(x, y, z, \dots, w)$ , зависящая от  $p$  векторных аргументов, в координатном виде. Для определенности рассмотрим трилинейную форму  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ . Каждый из векторов  $x, y, z$  может быть разложен по базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$ :

$$x = x_i e_i, \quad y = y_j e_j, \quad z = z_k e_k;$$

здесь обозначения для индексов суммирования мы выбираем различными только для удобства дальнейших выкладок. В силу линейности формы  $\varphi$  по всем аргументам, получим

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_i e_i, y_j e_j, z_k e_k) = x_i y_j z_k \varphi(e_i, e_j, e_k),$$

где  $\varphi(e_i, e_j, e_k)$  — значения формы  $\varphi$  от векторов базиса. Обозначим эти значения через  $a_{ijk}$ :

$$\varphi(e_i, e_j, e_k) = a_{ijk}.$$

Тогда форма  $\varphi$  запишется в виде

$$\varphi(x, y, z) = a_{ijk} x_i y_j z_k.$$

Таким образом, трилинейная форма записывается как однородный многочлен третьей степени, линейный относительно трех рядов переменных  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(y_1, y_2, y_3)$  и  $(z_1, z_2, z_3)$ . Этот многочлен содержит  $3^3 = 27$  слагаемых и столько же



коэффициентов  $a_{ijk}$ . Совокупность этих коэффициентов можно представить себе в виде кубичной матрицы третьего порядка.

Точно так же для 4-линейной формы  $\varphi(x, y, z, u)$ , зависящей от четырех векторных аргументов, получим

$$\varphi = a_{ijkl} x_i y_j z_k u_l,$$

где

$$a_{ijkl} = \varphi(e_i, e_j, e_k, e_l).$$

Многочлен, при помощи которого записывается эта форма, имеет  $3^4$  слагаемых и столько же коэффициентов  $a_{ijkl}$ .

Аналогично  $p$ -линейная форма  $\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w)$ , зависящая от  $p$  аргументов, запишется в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  в виде

$$\varphi = a_{ijk\dots m} x_i y_j z_k \dots w_m,$$

где

$$a_{ijk\dots m} = \varphi(e_i, e_j, e_k, \dots, e_m). \quad (1)$$

Коэффициенты  $a_{ijk\dots m}$  этой формы имеют  $p$  индексов, каждый из которых может принимать 3 значения. Всего такая полилинейная форма имеет  $3^p$  коэффициентов.

Рассмотренная в первом примере трилинейная форма  $(x, y, z)$  в координатной форме записывается так (гл. I, стр. 29):

$$(x, y, z) = \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k.$$

Совокупность коэффициентов этой трилинейной формы представляет собой кососимметричный символ Кронекера.

Если линейные формы  $\alpha(x)$ ,  $\beta(y)$  и  $\gamma(z)$  второго примера в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  записываются в виде

$$\alpha(x) = a_i x_i, \quad \beta(y) = b_j y_j, \quad \gamma(z) = c_k z_k,$$

то трилинейная форма  $\varphi = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$  будет выражаться так:

$$\varphi = (a_i b_j c_k) x_i y_j z_k,$$

а ее коэффициенты представятся в форме

$$a_{ijk} = a_i b_j c_k.$$

3. Введенные нами полилинейные формы определены независимо от выбора системы координат. Значения этих форм зависят только от значений их векторных аргументов, например, для формы  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  — только от значений векто-

ров  $x$ ,  $y$  и  $z$ , но не зависят от того, в каком базисе рассматриваются эти векторы. Следуя терминологии, введенной нами в § 6 гл. I (стр. 36), можно сказать, что полилинейные формы определены инвариантным способом.

Так как при переходе к новому базису координаты векторов меняются, то при этом будут меняться также и коэффициенты полилинейных форм (поскольку сама форма должна оставаться инвариантной). Совокупность коэффициентов инвариантной полилинейной формы представляет собой очень важный геометрический объект.

**О п р е д е л е н и е.** Геометрический (или физический) объект, который определяется совокупностью коэффициентов  $a_{ijk\dots m}$  полилинейной формы  $\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w)$ , записанной в некотором ортонормированном базисе, называется *ортгоналным тензором*. Сами числа  $a_{ijk\dots m}$  называются *компонентами*, или *координатами*, этого тензора.

Так как в данной книге никаких других тензоров, кроме ортогональных, не рассматривается, то всюду далее они называются просто тензорами. Будем говорить, что тензор  $a_{ijk\dots m}$  определяется линейной формой  $\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w)$ . Коэффициенты  $a_{ijk\dots m}$  формы  $\varphi$  степени  $p$  вычисляются, как мы видели, по формулам (1) и имеют  $p$  индексов. Поэтому тензор, соответствующий полилинейной форме степени  $p$ , называют тензором *валентности  $p$* .

Если форма  $\varphi$  задана в пространстве  $L_3$ , то каждый из индексов тензора может принимать независимо от других индексов значения 1, 2 и 3. Поэтому тензор валентности  $p$  в трехмерном пространстве будет иметь  $3^p$  компонент. На плоскости такой тензор будет иметь  $2^p$  компонент, в линейном пространстве  $L_n$  —  $n^p$  компонент.

Таким образом, совокупность коэффициентов  $a_i$  линейной формы  $\varphi = \varphi(x)$  представляет собой тензор валентности 1. А так как скалярное произведение произвольного постоянного вектора  $a$  на переменный вектор  $x$  представляет собой линейную форму, то совокупность координат  $a_i$  произвольного вектора  $a$  также представляет собой тензор валентности 1.

Точно так же совокупность коэффициентов  $a_{ij}$  билинейной формы  $\varphi = \varphi(x, y)$ , образующая матрицу  $A = (a_{ij})$ , представляет собой тензор. Это тензор валентности 2. В частности, таким тензором будет совокупность симметричных символов

Кroneкера  $\delta_{ij}$ , так как они являются коэффициентами билинейной формы  $\varphi = \chi y$ . Этот тензор называется *единичным тензором*.

Еще один пример тензора представляет совокупность кососимметричных символов Kroneкера  $\varepsilon_{ijk}$  — они являются коэффициентами трилинейной формы  $\varphi = (\chi, y, z)$ . Валентность этого тензора равна трем. Тензор  $\varepsilon_{ijk}$  называется *дискриминантным тензором*.

Отметим еще, что скалярную величину, которая не зависит от выбора ортонормированного базиса пространства, называют *тензором нулевой валентности*. Тензор нулевой валентности можно рассматривать как единственный коэффициент линейной формы нулевой степени. Тензор нулевой валентности называют также *инвариантом* (т. е. неизменным), так как его единственная компонента не меняет своего значения при преобразованиях базиса.

Два тензора называются *равными*, если тождественно равны определяющие их полилинейные формы. Равные тензоры имеют одинаковую валентность, и их соответствующие компоненты попарно равны в любой системе координат. В самом деле, тождество

$$\varphi(\chi, y, z, \dots, w) = \psi(\chi, y, z, \dots, w)$$

в координатной форме может быть записано в виде

$$a_{ijk\dots m} \chi_i y_j z_k \dots w_m = b_{ijk\dots m} \chi_i y_j z_k \dots w_m.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$a_{ijk\dots m} = b_{ijk\dots m}.$$

Тензор называется *нулевым*, если определяющая его полилинейная форма  $\varphi = \varphi(\chi, y, z, \dots, w)$  тождественно равна нулю. Все компоненты нулевого тензора равны нулю.

4. При переходе к новому базису координаты векторов, являющихся аргументами полилинейной формы, меняются по определенному закону, установленному нами в § 6 гл. I (см. формулы (7) на стр. 37). Поэтому коэффициенты полилинейной формы также будут изменяться совершенно определенным образом. Этот закон преобразования компонент тензора устанавливается в следующей теореме:

*Теорема. Для того чтобы совокупность величин  $a_{ijk\dots m}$ , зависящая от выбора базиса, была тензором,*

необходимо и достаточно, чтобы при переходе от ортонормированного базиса  $\{e_i\}$  к такому же базису  $\{e_{i'}\}$  она изменялась по закону

$$a_{i'j'k' \dots m'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{k'k} \dots \gamma_{m'm} a_{ijk \dots m}. \quad (2)$$

Докажем сначала необходимость условия теоремы. Пусть  $a_{ijk \dots m}$  — тензор. Тогда величины  $a_{ijk \dots m}$  представляют совокупность коэффициентов полилинейной формы  $\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w)$ :

$$a_{ijk \dots m} = \varphi(e_i, e_j, e_k, \dots, e_m).$$

В новом базисе коэффициенты этой формы вычисляются по аналогичным формулам:

$$a_{i'j'k' \dots m'} = \varphi(e_{i'}, e_{j'}, e_{k'}, \dots, e_{m'}).$$

Но векторы  $e_{i'}$  нового базиса выражаются через векторы  $e_i$  старого по формулам

$$e_{i'} = \gamma_{i'i} e_i.$$

Поэтому

$$a_{i'j'k' \dots m'} = \varphi(\gamma_{i'i} e_i, \gamma_{j'j} e_j, \gamma_{k'k} e_k, \dots, \gamma_{m'm} e_m).$$

И так как форма  $\varphi$  полилинейная, то

$$a_{i'j'k' \dots m'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{k'k} \dots \gamma_{m'm} \varphi(e_i, e_j, e_k, \dots, e_m).$$

Но в силу (1) эти равенства совпадают с доказываемыми соотношениями (2).

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть величины  $a_{ijk \dots m}$  при переходе к новому базису преобразуются по формулам (2). Рассмотрим  $p$  векторов  $x, y, z, \dots, w$ . Их разложения по старому и новому базисам могут быть записаны в виде

$$x = x_i e_i = x_{i'} e_{i'}, \quad y = y_j e_j = y_{j'} e_{j'},$$

$$z = z_k e_k = z_{k'} e_{k'}, \quad \dots, \quad w = w_m e_m = w_{m'} e_{m'}.$$

Чтобы доказать, что система величин  $a_{ijk \dots m}$  образует тензор, нужно доказать, что полилинейное выражение

$$\varphi = a_{ijk \dots m} x_i y_j z_k \dots w_m$$

является полилинейной формой, т. е. что оно зависит только от выбора векторов  $x, y, z, \dots, w$  и не зависит от выбора

базиса. После преобразования базиса это выражение перейдет в

$$\varphi' = a_{i'j'k' \dots m'} x_{i'} y_{j'} z_{k'} \dots \omega_{m'}.$$

Подставляя сюда значения коэффициентов  $a_{i'j'k' \dots m'}$  из соотношения (2) и  $x_{i'}$  из соотношений (7) § 6 гл. I, а  $y_{j'}$ ,  $z_{k'}$ , ...,  $\omega_{m'}$  из аналогичных соотношений, мы получим

$$\begin{aligned} \varphi' &= \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{k'k} \dots \gamma_{m'm} a_{ijk \dots m} \gamma_{i'p} x_p \gamma_{j'q} y_q \gamma_{k'r} z_r \dots \gamma_{m's} \omega_s = \\ &= (\gamma_{i'i} \gamma_{i'p}) (\gamma_{j'j} \gamma_{j'q}) (\gamma_{k'k} \gamma_{k'r}) \dots (\gamma_{m'm} \gamma_{m's}) a_{ijk \dots m} x_p y_q z_r \dots \omega_s. \end{aligned}$$

Но в силу свойств ортогональных матриц (§ 5 гл. I)

$$\gamma_{i'i} \gamma_{i'p} = \delta_{ip}, \quad \gamma_{j'j} \gamma_{j'q} = \delta_{jq}, \quad \dots, \quad \gamma_{m'm} \gamma_{m's} = \delta_{ms}.$$

Поэтому

$$\varphi' = a_{ijk \dots m} \delta_{ip} x_p \delta_{jq} y_q \dots \delta_{ms} \omega_s = a_{ijk \dots m} x_i y_j z_k \dots \omega_m = \varphi,$$

что и требовалось доказать.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В каком случае функция

$$\varphi(x, y, \dots, z) = a$$

является полилинейной формой?

2. Образует ли функция

$$\varphi(x, y, z) = x_1^2 y_1 z_1,$$

где  $x_1, y_1, z_1$  — первые координаты векторов  $x, y, z$  в некотором базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , полилинейную форму?

3. В пространстве  $C[a, b]$  непрерывных на  $[a, b]$  функций определена функция

$$\begin{aligned} \varphi[f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)] &= f_1(t_1) \cdot f_2(t_2) \dots f_k(t_k), \\ a < t_i < b, \quad i &= 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Будет ли такая функция полилинейной формой?

4. В пространстве  $C[a, b]$  определим функцию

$$\varphi[f(x), g(y), h(z)] = \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, y, z) f(x) g(y) h(z) dx dy dz,$$

где  $K(x, y, z)$  — фиксированная непрерывная функция от  $x, y, z$ . Будет ли эта функция полилинейной формой?

5. Фиксируем в пространстве  $L_8$  некоторый базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , и пусть  $x = x_i e_i$ . Доказать, что числа  $x_{ij} = x_i x_j$  образуют тензор валентности два.

6. Доказать, что компоненты единичного тензора  $\delta_{ij}$  имеют одни и те же значения в любом ортонормированном базисе, т. е.  $\delta_{i'j'} = \delta_{ij}$  при  $i = i'$ ,  $j = j'$ .

7. Доказать, что компоненты дискриминантного тензора  $\epsilon_{ijk}$  имеют одинаковые значения в ортонормированных базисах одинаковой ориентации и противоположные значения в базисах с различной ориентацией, т. е.  $\epsilon_{i'j'k'} = \pm \epsilon_{ijk}$  при  $i' = i$ ,  $j' = j$ ,  $k' = k$ .

8. Показать, что совокупность величин  $\alpha_{ijkl}$ , которая в любом базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  определяется равенствами

$$\alpha_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, j = l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

образует тензор валентности четыре.

9. Написать закон преобразования компонент тензора пятой валентности при замене базиса.

10. Если  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  — инвариантная функция прямоугольных координат  $x_i$ , то величины  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$  образуют соответственно тензоры первой и второй валентности.

#### § 4. Алгебраические операции над тензорами

1. Сложение тензоров. Пусть  $\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w)$  и  $\psi = \psi(x, y, z, \dots, w)$  — две полилинейные формы от одних и тех же векторных аргументов одной и той же степени  $p$ . Их суммой  $\varphi + \psi$ , как легко видеть, будет полилинейная форма той же степени  $p$ . Суммой тензоров  $a_{ijk\dots m}$  и  $b_{ijk\dots m}$  валентности  $p$ , определяемых полилинейными формами  $\varphi$  и  $\psi$ , назовем тензор  $c_{ijk\dots m}$ , определяемый формой  $\varphi + \psi$ . Так как

$$\varphi + \psi = (a_{ijk\dots m} + b_{ijk\dots m})x_i y_j z_k \dots w_m,$$

то компоненты тензора  $c_{ijk\dots m}$  связаны с компонентами тензоров  $a_{ijk\dots m}$  и  $b_{ijk\dots m}$  соотношениями

$$c_{ijk\dots m} = a_{ijk\dots m} + b_{ijk\dots m}.$$

2. Умножение тензора на действительное число. Произведение  $\lambda\varphi$  полилинейной формы  $\varphi$  степени  $p$  на действительное число  $\lambda$  является полилинейной формой той же степени  $p$ . Произведением тензора  $a_{ijk\dots m}$  валентности  $p$ , определяемого формой  $\varphi$ , на число  $\lambda$  назовем тензор  $b_{ijk\dots m}$  той же валентности, определяемый формой  $\lambda\varphi$ . Так как

$$\lambda\varphi = (\lambda a_{ijk\dots m})x_i y_j z_k \dots w_m,$$

то

$$b_{ijk\dots m} = \lambda a_{ijk\dots m}.$$

Из сказанного выше следует, что совокупность полилинейных форм степени  $p$ , так же как и совокупность тензоров валентности  $p$ , образует линейное пространство. Размерность этого пространства будет равна  $3^p$ . Такое пространство называют  $p$ -кратным тензорным произведением линейного пространства  $L_3$ . Базисом этого пространства могут служить, например,  $3^p$   $p$ -линейных форм вида

$$\varphi_{ijk\dots m} = x_i y_j z_k \dots w_m.$$

3. Умножение тензоров. Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  — две полилинейные формы соответственно степеней  $p$  и  $q$  от различных векторных аргументов. Тогда их произведение  $\varphi \cdot \psi$  будет полилинейной формой степени  $p+q$ . Например, если  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  — трилинейная, а  $\psi = \psi(u, v)$  — билинейная форма, то их произведение  $\varphi(x, y, z) \cdot \psi(u, v)$  будет полилинейной формой степени 5.

Формы  $\varphi$  и  $\psi$  определяют тензоры соответственно валентностей  $p$  и  $q$ . Назовем *произведением тензоров*, определяемых формами  $\varphi$  и  $\psi$ , тензор, определяемый их произведением  $\varphi \cdot \psi$ . Так как форма  $\varphi \cdot \psi$  имеет степень  $p+q$ , то произведением тензоров валентности  $p$  и  $q$  является тензор валентности  $p+q$ . Например, формы

$$\varphi(x, y, z) = a_{ijk} x_i y_j z_k \text{ и } \psi(u, v) = b_{lm} u_l v_m$$

определяют соответственно тензоры  $a_{ijk}$  и  $b_{lm}$  валентностей 3 и 2, а их произведение

$$\varphi(x, y, z) \psi(u, v) = (a_{ijk} b_{lm}) x_i y_j z_k u_l v_m$$

— тензор  $a_{ijk} b_{lm}$  валентности 5, который является произведением тензоров  $a_{ijk}$  и  $b_{lm}$ .

Таким образом, *компоненты произведения двух тензоров представляют собой произведения каждой компоненты первого тензора на каждую компоненту второго*.

В примере в) на стр. 56 мы, по существу, построили тензор второй валентности, составляя произведение двух одновалентных тензоров  $a_i$  и  $b_j$ ; точно так же на стр. 60 в примере б) мы построили трехвалентный тензор, являющийся произведением трех одновалентных тензоров  $a_i$ ,  $b_j$  и  $c_k$ .

4. Свертывание тензора. Пусть  $\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w)$  — полилинейная форма степени  $p$ . Подставим в нее вместо каких-либо двух аргументов, например  $x$  и  $y$ , базисные векторы  $e_i$  и  $e_j$  и обозначим

$$\varphi(e_i, e_j, z, \dots, w) = \varphi_{ij}.$$

Эти выражения являются линейными функциями векторных аргументов  $z, \dots, w$ , но они не являются линейными формами, так как зависят еще от выбора базиса. Найдем, как выражения  $\varphi_{ij}$  изменяются при преобразованиях базиса пространства  $L_3$ . Если обозначить

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(e_{i'}, e_{j'}, z, \dots, w),$$

то, так как

$$e_{i'} = \gamma_{i'i} e_i, \quad e_{j'} = \gamma_{j'j} e_j,$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_{i'j'} &= \varphi(\gamma_{i'i} e_i, \gamma_{j'j} e_j, z, \dots, w) = \\ &= \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \varphi(e_i, e_j, z, \dots, w) = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \varphi_{ij}. \end{aligned}$$

Положим теперь  $i' = j'$  и сложим три получающихся при этом равенства. Тогда

$$\varphi_{i'i} = \gamma_{i'i} \gamma_{i'i} \varphi_{ii}.$$

Но по свойству ортогональных матриц (формула (6) § 6 гл. I)

$$\gamma_{i'i} \gamma_{i'j} = \delta_{ij}$$

и

$$\varphi_{i'i} = \delta_{ij} \varphi_{ij} = \varphi_{ii}.$$

Эти соотношения показывают, что выражение  $\varphi_{ii}$ , которое линейно зависит от векторных аргументов  $z, \dots, w$ , не зависит от выбора базиса. Следовательно, оно является полилинейной формой от  $z, \dots, w$ . Степень этой полилинейной формы равна  $p - 2$ , так как число векторных аргументов, от которых она зависит, на две единицы меньше числа аргументов, от которых зависит форма  $\varphi$ .

Запишем теперь исходную форму  $\varphi$  в координатах:

$$\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w) = a_{ijk\dots m} x_i y_j z_k \dots w_m.$$

Если положить здесь  $x = e_i$ ,  $y = e_j$ , то будем иметь

$$x_i = 1, \quad x_p = 0 \text{ при } p \neq i; \quad y_j = 1, \quad y_q = 0 \text{ при } q \neq j.$$



Поэтому выражения  $\varphi_{ij}$  примут вид

$$\varphi_{ij} = \varphi(e_i, e_j, z, \dots, w) = a_{ijk\dots m} z_k \dots w_m.$$

Отсюда вытекает, что

$$\varphi_{ii} = a_{iik\dots m} z_k \dots w_m.$$

Следовательно, компоненты тензора  $b_{k\dots m}$  валентности  $p-2$ , определяемого формой  $\varphi_{ii}$ , выражаются через компоненты тензора  $a_{ijk\dots m}$ , определяемого исходной формой  $\varphi$ , по формулам

$$b_{k\dots m} = a_{iik\dots m}$$

или, более подробно, по формулам

$$b_{k\dots m} = a_{11k\dots m} + a_{22k\dots m} + a_{33k\dots m}.$$

Операция получения тензора  $b_{k\dots m}$  из тензора  $a_{ijk\dots m}$  называется *свертыванием* тензора  $a_{ijk\dots m}$  по индексам  $i$  и  $j$ .

Точно так же можно определить свертывание тензора  $a_{ijk\dots m}$  по любой другой паре индексов. Как мы видим, при свертывании тензора его валентность понижается на две единицы. Например, при свертывании двухвалентного тензора  $a_{ij}$  мы получим тензор  $a_{ii}$  нулевой валентности, т. е. инвариант. Этот инвариант называется *следом тензора*  $a_{ij}$  и обозначается так:

$$a_{ii} = \text{Sp}(a_{ij}^*).$$

5. Свертывание произведения тензоров. Рассмотрим два произвольных тензора, например, тензоры  $a_{ijk}$  и  $b_{lm}$  валентностей 3 и 2, и образуем их произведение  $a_{ijk}b_{lm}$  — пятивалентный тензор. А теперь свернем полученный тензор, например, по индексам  $k$  и  $l$ . В результате получим тензор

$$a_{ijk}b_{km} = a_{ij1}b_{1m} + a_{ij2}b_{2m} + a_{ij3}b_{3m}$$

валентности 3. Такая операция называется *свертыванием тензоров*  $a_{ijk}$  и  $b_{lm}$  по индексам  $k$  и  $l$ .

---

\*) Sp — две первые буквы от немецкого слова «Spur», означающего «след». В литературе след тензора  $a_{ij}$  обозначают также через  $\text{tr } a_{ij}$ . Здесь «trace» — английское слово, означающее «след».

Таким образом, операция свертывания двух тензоров состоит в их умножении и свертывании полученного в результате умножения тензора по индексам, принадлежащим разным сомножителям. В результате свертывания тензоров валентности  $p$  и  $q$  получается тензор валентности  $p + q - 2$ .

По существу, с операцией свертывания тензоров мы уже много раз встречались. Так, например, скалярное произведение векторов  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{y} = y_i \mathbf{e}_i$ , которое вычисляется по формуле  $\mathbf{x}\mathbf{y} = x_i y_i$ , представляет собой результат свертывания одновалентных тензоров  $x_i$  и  $y_i$ , составленных из координат векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Линейная форма  $\varphi(\mathbf{x}) = a_i x_i$  является результатом свертывания тензоров  $a_i$  и  $x_i$ ; билинейная форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{ij} x_i y_j$  является результатом свертывания тензора  $a_{ij}$  с тензором  $x_i$  и последующего свертывания тензора  $a_{ij} x_i$  с тензором  $y_j$  и т. д.

Особенно простой характер носит свертывание произвольного тензора с единичным тензором  $\delta_{ij}$ . Например,

$$a_{ijk} \delta_{kl} = a_{ij1} \delta_{1l} + a_{ij2} \delta_{2l} + a_{ij3} \delta_{3l} = a_{ijl},$$

так как  $\delta_{kl}$  отлично от нуля только при  $k = l$ .

Как уже видно из приведенных примеров, свертывание тензоров можно производить не только по одной паре индексов, а по любому количеству  $r$  таких пар. В результате этого свертывания получается новый тензор, валентность которого на  $2r$  единиц меньше суммы валентностей исходных тензоров.

Докажем теперь важную теорему, которую обычно называют обратным тензорным признаком.

**Теорема.** Пусть в каждом ортонормированном базисе задана совокупность  $3^{p+q}$  чисел  $a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}$  такая, что при свертывании ее с произвольным тензором  $t_{j_1 \dots j_q}$  валентности  $q$  снова получается тензор валентности  $p$ . Тогда исходная система чисел является тензором валентности  $p + q$ .

Докажем эту теорему для частного случая, когда  $p = 3$ ,  $q = 2$  и заданная система чисел имеет вид  $a_{ijklm}$ . По условию теоремы величины

$$s_{ijk} = a_{ijklm} t_{lm}$$

образуют тензор, если только  $t_{lm}$  — тензор. Пусть  $t_{lm} = u_l v_m$  — произведение векторов  $u_l$  и  $v_m$ . Тогда

$$s_{ijk} = a_{ijklm} u_l v_m.$$

Свернем это выражение с произвольными векторами  $x_i, y_j, z_k$ :

$$s_{ijk} x_i y_j z_k = a_{ijklm} x_i y_j z_k u_l v_m.$$

Так как  $s_{ijk}$  — тензор, то выражение, стоящее в левой части этого равенства, представляет скалярную функцию. Но правая часть этого равенства линейно зависит от координат векторов  $x, y, z, u, v$ . Поэтому эта скалярная функция является полилинейной формой степени пять. Следовательно, числа  $a_{ijklm}$ , являющиеся коэффициентами этой полилинейной формы, образуют тензор валентности пять. Точно так же эта теорема доказывается и в общем случае.

6. Перестановка индексов тензора. Пусть  $\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w)$  — полилинейная форма и  $a_{ijk \dots m}$  — определяемый ее тензор, так что

$$\varphi = a_{ijk \dots m} x_i y_j z_k \dots w_m.$$

Рассмотрим форму  $\psi$ , которая получается из формы  $\varphi$  путем перестановки некоторых ее аргументов. Пусть, например,

$$\psi(x, y, z, \dots, w) = \varphi(y, z, x, \dots, w).$$

Если обозначить через  $b_{ijk \dots m}$  тензор, определяемый формой  $\psi$ , то это соотношение можно переписать в виде

$$b_{ijk \dots m} x_i y_j z_k \dots w_m = a_{ijk \dots m} y_i z_j x_k \dots w_m.$$

Меняя индексы суммирования в правой части и учитывая, что это соотношение является тождеством, получим отсюда, что

$$b_{ijk \dots m} = a_{jki \dots m}.$$

Тензор  $b_{ijk \dots m}$  отличается от тензора  $a_{ijk \dots m}$  только другой нумерацией своих компонент. Операция, состоящая в перенумеровании компонент тензора  $a_{ijk \dots m}$ , называется *перестановкой индексов тензора*. Заметим, что тензоры  $a_{ijk \dots m}$  и  $b_{ijk \dots m}$  — существенно различные тензоры, так как их соответствующие компоненты (компоненты с одинаковыми индексами), вообще говоря, не будут равны между собой.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть  $a_{ij}$  — тензор второй валентности. Доказать, что алгебраические дополнения  $A_{ij}$  определителя  $a$ , составленного из компонент этого тензора, также составляют тензор валентности два, который удовлетворяет соотношению

$$A_{ik}a_{kj} = a\delta_{ij}$$

(см. упр. 5 на стр. 30).

2. Пусть даны тензор третьей валентности  $a_{ijk}$  и тензор второй валентности  $b_{lm}$ . Получить из них путем умножения и свертывания тензор пятой валентности, тензоры третьей валентности, тензоры первой валентности.

3. Показать, что тензор второй валентности  $z_{ij}$  тогда и только тогда есть произведение двух тензоров первой валентности, когда его координаты удовлетворяют уравнениям

$$z_{ki}z_{lj} - z_{li}z_{kj} = 0.$$

4. Построить инвариант путем свертывания индексов у тензора  $a_{ij}$ , компоненты которого — элементы матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 6 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Даны тензор второй валентности  $a_{ij}$ , матрица которого в некотором базисе равна

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

и тензоры первой валентности  $x_i$  и  $y_i$ , которые в том же базисе имеют компоненты

$$\begin{aligned} (x_i) &= (2, 1, 4), \\ (y_i) &= (3, 7, -1). \end{aligned}$$

Найти:

а)  $a_{ij}x_j$ ; б)  $a_{ij}x_i$ ; в)  $a_{ij}y_j$ ; г)  $a_{ij}y_i$ ; д)  $a_{ij}x_iy_j$ ; е)  $a_{ij}y_ix_j$ ; ж)  $a_{ij}\delta_{ij}$ ;  
з)  $a_{ij} - \frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}$ ; и)  $\left(a_{ij} - \frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}\right)x_i$ ; к)  $\left(a_{ij} - \frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}\right)x_iy_j$ .

6. Найти какой-нибудь базис линейного пространства тензоров второй валентности.

## § 5. Симметричные и антисимметричные тензоры

1. Пусть  $\varphi = \varphi(x, y)$  — билинейная форма. Эта форма называется *симметричной*, если для любых векторов  $x$  и  $y$

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Тензор валентности два, определяемый симметричной билинейной формой, называется *симметричным тензором*.

Компоненты симметричного тензора валентности два в любом ортонормированном базисе образуют *симметричную матрицу*, т. е. удовлетворяют условию

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Это непосредственно следует из того, что для симметричной билинейной формы в любом базисе

$$\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \varphi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$$

и что  $a_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ .

Симметричная матрица подробно может быть записана так:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что симметричный тензор второй валентности имеет шесть существенных компонент.

Например, скалярное произведение двух векторов является симметричной билинейной формой, так как  $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{x}$ . Коэффициенты этой билинейной формы, как мы видели, образуют единичный тензор  $\delta_{ij}$ , матрица которого является симметричной:

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь полилинейную форму  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots, \mathbf{w})$  степени  $p$ . Форма  $\varphi$  называется *симметричной по двум* каким-либо *аргументам*, если она не меняет своего значения при перестановке этих аргументов. Тензор, определяемый такой полилинейной формой, называется *симметричным по соответствующим индексам*.

Например, форма  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots, \mathbf{w})$  симметрична по аргументам  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{z}$ , если

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots, \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{w}).$$

Тензор  $a_{ijk\dots m}$ , определяемый этой формой, будет симметричным по индексам  $i$  и  $k$ , и его компоненты в любой системе координат удовлетворяют соотношениям

$$a_{ijk\dots m} = a_{kji\dots m}.$$

Полилинейная форма  $\varphi$  степени  $p$  называется *симметричной*, если она не меняется при любой перестановке аргументов. Определяемый ею тензор называется *симметричным тензором валентности  $p$* . Компоненты симметричного тензора, отличающиеся только порядком индексов, но не их значениями, равны между собой.

Например, трилинейная форма  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  будет симметрична, если для любых трех векторов  $x, y, z$

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= \varphi(y, z, x) = \varphi(z, x, y) = \\ &= \varphi(y, x, z) = \varphi(z, y, x) = \varphi(x, z, y);\end{aligned}$$

компоненты тензора  $a_{ijk}$ , определяемого этой формой, не меняются при любой перестановке индексов.

2. Билинейная форма  $\varphi = \varphi(x, y)$  называется *антисимметричной*, если для любых векторов  $x$  и  $y$

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

Тензор валентности два, определяемый антисимметричной билинейной формой, называется *антисимметричным тензором*.

Так как теперь  $\varphi(e_i, e_j) = -\varphi(e_j, e_i)$ , то компоненты антисимметричного тензора в любом базисе удовлетворяют условию

$$a_{ij} = -a_{ji},$$

т. е. образуют кососимметричную матрицу. Эта матрица подробно может быть записана так:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда ясно, что антисимметричный тензор валентности два имеет всего три существенные компоненты.

Аналогично определяется *антисимметричность полилинейной формы степени  $p$*  по двум каким-либо аргументам. Тензор валентности  $p$ , определяемый такой формой, будет *антисимметричным тензором по соответствующим индексам*.

Полилинейная форма степени  $p$  называется *антисимметричной*, если она меняет знак при перестановке любой пары

ее аргументов. Тензор, определяемый этой формой, называется *антисимметричным тензором*. Такой тензор меняет знак при перестановке любой пары индексов.

Например, смешанное произведение  $(x, y, z)$  векторов  $x, y, z$  является антисимметричной трилинейной формой. Тензор  $\varepsilon_{ijk}$ , определяемый этой формой, будет антисимметричным тензором. Он имеет только одну существенную компоненту  $\varepsilon_{123} = \varepsilon$ .

3. Пусть  $\varphi = \varphi(x, y)$  — произвольная билинейная форма. Построим при ее помощи билинейные формы

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi(x, y) + \varphi(y, x)],$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi(x, y) - \varphi(y, x)].$$

Легко видеть, что форма  $\varphi_1$  будет симметричной, а  $\varphi_2$  — антисимметричной формой. В самом деле,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \frac{1}{2} [\varphi(x, y) + \varphi(y, x)] = \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(y, x) + \varphi(x, y)] = \varphi_1(y, x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y) &= \frac{1}{2} [\varphi(x, y) - \varphi(y, x)] = \\ &= -\frac{1}{2} [\varphi(y, x) - \varphi(x, y)] = -\varphi_2(y, x). \end{aligned}$$

Операции, при помощи которых из билинейной формы  $\varphi$  получаются билинейные формы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , называются соответственно *симметрированием* и *альтернированием формы*.

Форма  $\varphi$  может быть теперь представлена в виде суммы

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y).$$

Такое представление формы  $\varphi(x, y)$  называют ее *разложением на симметричную и антисимметричную части*.

Посмотрим теперь, как выразятся тензоры, определяемые формами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , через тензор, определяемый формой  $\varphi$ . Запишем форму  $\varphi$  в координатной форме:

$$\varphi(x, y) = a_{ij}x_iy_j,$$

где  $x_i$  и  $y_j$  — координаты векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  соответственно. Тогда формы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  примут вид

$$\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (a_{ij}x_iy_j + a_{ji}y_ix_j),$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (a_{ij}x_iy_j - a_{ji}y_ix_j).$$

Но, изменив обозначения индексов суммирования, вторые слагаемые этих выражений можно переписать в виде  $a_{ji}x_iy_j$ . Поэтому после приведения подобных членов формы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  запишутся так:

$$\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) x_i y_j,$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji}) x_i y_j.$$

Тензоры, определяемые этими формами, обозначают обычно символами  $a_{(ij)}$  и  $a_{[ij]}$ . Первый из этих тензоров будет симметричным, а второй — антисимметричным. Таким образом,

$$a_{(ij)} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}),$$

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji}).$$

Операции, при помощи которых тензоры  $a_{(ij)}$  и  $a_{[ij]}$  получаются из тензора  $a_{ij}$ , называются соответственно *симметрированием* и *альтернированием тензора*  $a_{ij}$ . Очевидно, что

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]}.$$

Подобным же образом определяются операции симметрирования и альтернирования полилинейных форм по какой-нибудь паре их аргументов и соответствующие операции с определяемыми ими тензорами.

Несколько более сложно определяется полное симметрирование и альтернирование полилинейных форм степени  $p$ , большей чем 2. Пусть, например,  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  — трилинейная форма. Чтобы построить из нее форму, симметричную по всем индексам, следует произвести всевозможные перестановки ее аргументов. Число таких перестановок равно



$3! = 6$ . Поэтому искомая симметричная форма имеет вид

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{6} [\varphi(x, y, z) + \varphi(y, z, x) + \varphi(z, x, y) + \\ + \varphi(y, x, z) + \varphi(z, y, x) + \varphi(x, z, y)].$$

Точно так же форма

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{1}{6} [\varphi(x, y, z) + \varphi(y, z, x) + \varphi(z, x, y) - \\ - \varphi(y, x, z) - \varphi(z, y, x) - \varphi(x, z, y)]$$

являются антисимметричной трилинейной формой. Доказательство симметричности формы  $\varphi_1$  и антисимметричности формы  $\varphi_2$  предоставляется читателю.

Операции, при помощи которых формы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  были получены из трилинейной формы  $\varphi$ , называются *симметрированием* и *альтернированием* формы  $\varphi$ .

Обозначим через  $a_{ijk}$  тензор, определяемый трилинейной формой  $\varphi(x, y, z)$ . Тогда тензоры  $a_{(ijk)}$  и  $a_{[ijk]}$ , соответствующие формам  $\varphi_1(x, y, z)$  и  $\varphi_2(x, y, z)$ , будут вычисляться следующим образом:

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{6} (a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{jik} + a_{kji} + a_{ikj}), \\ a_{[ijk]} = \frac{1}{6} (a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} - a_{jik} - a_{kji} - a_{ikj}).$$

Операции, при помощи которых тензоры  $a_{(ijk)}$  и  $a_{[ijk]}$  получаются из тензора  $a_{ijk}$ , называются *операциями симметрирования* и *альтернирования* этого тензора.

4. Если в билинейной форме  $\varphi = \varphi(x, y)$  считать  $y = x$ , то получим скалярную функцию одного векторного аргумента  $\varphi = \varphi(x, x)$ . Такая функция называется *квадратичной формой*.

Таким образом, каждой билинейной форме  $\varphi(x, y)$  может быть поставлена в соответствие единственная квадратичная форма  $\varphi(x, x)$ . Но разным билинейным формам может соответствовать одна и та же квадратичная форма. В самом деле, пусть  $\varphi = \varphi(x, y)$  — произвольная билинейная форма и

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi(x, y) + \varphi(y, x)]$$

— билинейная форма, полученная из нее путем операции симметрирования. Тогда легко видеть, что

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})] = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

т. е. квадратичные формы, отвечающие различным билинейным формам  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и  $\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , оказываются одинаковыми.

Поэтому всегда можно считать, что квадратичная форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  получена из симметричной билинейной формы  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  при  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . Эта симметричная билинейная форма называется *полярной билинейной формой для заданной квадратичной формы*  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ . Полярная форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  однозначно определяется своей квадратичной. В самом деле,

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Но так как  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , то

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} [\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y})].$$

Найдем теперь, как запишется квадратичная форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  в ортонормированном базисе  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Пусть  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — билинейная форма, полярная форме  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ . Эта билинейная форма симметрична и, как уже известно, в координатной форме записывается так:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{ij}x_iy_j,$$

где  $a_{ij} = a_{ji}$ . Поэтому квадратичная форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  записывается в виде

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_{ij}x_ix_j.$$

Это выражение представляет собой однородный многочлен второй степени относительно координат вектора  $\mathbf{x}$ . Коэффициенты  $a_{ij}$  образуют симметричный тензор. Подробно квадратичная форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

Обратно, если дан симметричный тензор  $a_{ij}$ , то он определяет единственную квадратичную форму  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_{ij}x_ix_j$ . Поэтому между симметричными тензорами валентности два и квадратичными формами устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Примером квадратичной формы может служить скалярный квадрат вектора  $x^2 = x_i x_i = \delta_{ij} x_i x_j$ . Полярной билинейной формой для нее служит скалярное произведение векторов  $xu = x_i u_i = \delta_{ij} x_i u_j$ . Как мы уже видели, эта билинейная форма является симметричной.

Пусть теперь  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  — трилинейная форма. Полагая в ней  $z = x$  и  $y = x$ , получим кубичную форму  $\varphi = \varphi(x, x, x)$ . Так же как это было сделано выше, можно доказать, что между кубичными формами, симметричными трилинейными формами и симметричными тензорами третьей валентности устанавливается взаимно однозначное соответствие. Всякая кубичная форма в координатах может быть записана в виде

$$\varphi = a_{ijk} x_i x_j x_k,$$

где  $a_{ijk}$  — симметричный тензор. Подробно кубичная форма может быть записана так:

$$\begin{aligned} \varphi = & a_{111} x_1^3 + a_{222} x_2^3 + a_{333} x_3^3 + \\ & + 3a_{112} x_1^2 x_2 + 3a_{122} x_1 x_2^2 + 3a_{113} x_1^2 x_3 + \\ & + 3a_{133} x_1 x_3^2 + 3a_{223} x_2^2 x_3 + 3a_{233} x_2 x_3^2 + 6a_{123} x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Десять коэффициентов этой формы совпадают с десятью существенными компонентами симметричного тензора  $a_{ijk}$ .

Точно так же строятся формы любой степени  $p$ , связанные с симметричными тензорами валентности  $p$ .

5. Симметричным тензорам можно дать геометрическую характеристику при помощи так называемой характеристической поверхности.

Пусть  $a_{ij}$  — симметричный тензор валентности два. Возьмем с его помощью квадратичную форму  $\varphi(x, x) = a_{ij} x_i x_j$  и рассмотрим совокупность векторов  $x$ , удовлетворяющих условию

$$\varphi(x, x) = 1. \quad (1)$$

Зафиксируем начало координат в точке  $O$  пространства  $E_3$  и будем считать, что вектор  $x = \overline{OM}$  служит радиусом-вектором точки  $M$ . Тогда геометрическое место точек  $M$ , радиусы-векторы которых удовлетворяют уравнению (1), будет представлять собой некоторую поверхность  $S$ , которую называют *характеристической поверхностью тензора*  $a_{ij}$ .

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат, начало которой расположено в точке  $O$  и направления осей которой определяются векторами  $e_1, e_2, e_3$  ортонормированного базиса. В этой системе координат уравнение характеристической поверхности запишется так:

$$a_{ij}x_i x_j = 1. \quad (2)$$

Уравнение (2) показывает (гл. I, стр. 48), что *характеристической поверхностью симметричного тензора второй валентности служит центральная поверхность второго порядка, центр симметрии которой совпадает с началом координат  $O$ .*

Найдем, например, характеристическую поверхность единичного тензора  $\delta_{ij}$ . Ее уравнение запишется в виде

$$\delta_{ij}x_i x_j = 1.$$

Расписывая подробно суммирование по индексам  $i$  и  $j$  в левой части этого уравнения, мы получим

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Последнее уравнение показывает, что *характеристической поверхностью единичного тензора является сфера единичного радиуса.*

Пусть, далее,  $a_{ij} = a_i a_j$ . Тогда уравнение характеристической поверхности тензора  $a_{ij}$  запишется так:

$$a_i a_j x_i x_j = 1.$$

Легко проверить, что это уравнение может быть записано в виде

$$(a_i x_i)^2 = 1.$$

Но последнее уравнение распадается на два:

$$a_i x_i = \pm 1.$$

Следовательно, *характеристическая поверхность тензора  $a_i a_j$  представляет собой пару параллельных плоскостей, симметрично расположенных относительно начала координат.*

Рассмотрим снова характеристическую поверхность (1) произвольного симметричного тензора  $a_{ij}$ . Пусть  $x = \overline{OM}$

— радиус-вектор текущей точки этой поверхности и  $\mathbf{p}$  — единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор  $\mathbf{x}$ , так что

$$\mathbf{x} = x\mathbf{p},$$

где  $x = |\mathbf{x}|$  — длина вектора  $\mathbf{x}$ . Подставим это выражение для вектора  $\mathbf{x}$  в уравнение характеристической поверхности (1). Тогда в силу линейности формы  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  по каждому аргументу получим

$$x^2 \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \frac{1}{x^2},$$

т. е. значение квадратичной формы  $\varphi$  от любого единичного вектора  $\mathbf{p}$  равно единице, деленной на квадрат расстояния от точки  $O$  до той точки характеристической поверхности  $S$ , в которой ее пересекает луч, проходящий через точку  $O$  и имеющий направление вектора  $\mathbf{p}$ .

В частности, если  $\mathbf{p} = \mathbf{e}_i$ ,  $M_i$  — точка, в которой луч  $Oe_i$  пересекает характеристическую поверхность, и  $\alpha_i = |\overline{OM_i}|$ , то

$$\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \frac{1}{\alpha_i^2}.$$

Но  $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = a_{ii}$  (здесь по индексам  $i, i$  суммирование не производится). Поэтому

$$a_{ii} = \frac{1}{\alpha_i^2}.$$

Подобным же образом строится характеристическая поверхность симметричного тензора более высокого порядка. Например, для симметричного тензора  $a_{ijk}$  валентности три характеристическая поверхность имеет уравнение

$$a_{ijk} x_i x_j x_k = 1 \quad (3)$$

и является поверхностью третьего порядка. Эта характеристическая поверхность дает возможность геометрически найти значение кубичной формы

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_{ijk} x_i x_j x_k$$

от единичного вектора  $\mathbf{p}$ , а именно

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{p}) = \frac{1}{x^3},$$

где  $x$  — расстояние от начала координат  $O$  до той точки  $M$  характеристической поверхности, в которой ее пересекает луч, выходящий из точки  $O$  и имеющий направление вектора  $\mathbf{p}$ . В частности,

$$a_{iii} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \frac{1}{\alpha_i^3},$$

где  $\alpha_i$  — расстояние от точки  $O$  до точки  $M$ , в которой луч  $O\mathbf{e}_i$  пересекает характеристическую поверхность.

Заметим, что уравнением типа (2) и (3) характеристическую поверхность можно определить не только для симметричных, но и для произвольных тензоров. Но описывать она будет только свойства симметричной части этих тензоров. В самом деле, если, например,  $a_{ij}$  — произвольный тензор второй валентности, то

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]}$$

и уравнение (2) принимает вид

$$a_{(ij)}x_ix_j = 1.$$

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что в пространстве  $L_3$  любая трилинейная кососимметричная форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  только скалярным множителем отличается от смешанного произведения  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ .

2. Доказать, что в пространстве  $L_n$  любая кососимметричная форма степени  $p > 3$  тождественно равна нулю.

3. Сформулировать и доказать теоремы, аналогичные утверждениям задач 1 и 2, для пространства  $L_n$ .

4. Доказать, что если тензор  $a_{ijk}$  симметричен по индексам  $i$  и  $j$  и кососимметричен по индексам  $j$  и  $k$ , то он равен нулю.

5. Доказать, что если  $a_{ij}$  — симметричный, а  $b_{ij}$  — кососимметричный тензор, то  $a_{ij}b_{ij} = 0$ .

6. Доказать, что если тензор  $a_{ijk}$  симметричен по первым двум индексам ( $a_{ijk} = a_{jik}$ ) и для любого вектора  $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$  имеет место соотношение

$$a_{ijk}x_ix_jx_k = 0,$$

то

$$a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} = 0.$$

7. Доказать, что если для тензора  $a_{ij}$  и для любого вектора  $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$

$$a_{ij}x_j = ax_i$$

(причем  $\alpha$  не зависит от  $x$ ), то

$$a_{ij} = \alpha \delta_{ij}.$$

8. Доказать, что если для тензора  $a_{ijkl}$  и для любых векторов  $x = x_i e_i$ ,  $y = y_j e_j$  выполняются соотношения  $a_{ijkl} x_i y_j x_k y_l = 0$ , то

$$a_{ijkl} + a_{jkli} + a_{klij} + a_{iljk} = 0.$$

Если, кроме того,

$$a_{ijkl} + a_{jikl} = 0, \quad a_{ijkl} + a_{ijlk} = 0, \quad a_{(ijk)l} = 0,$$

то

$$a_{ijk} = 0.$$

9. Доказать, что тензор третьей валентности можно записать в виде

$$a_{ijk} = a_{(ijk)} + a_{[ijk]} + \frac{2}{3} (a_{[ij]k} + a_{[kj]i}) + \frac{2}{3} (a_{(ij)k} - a_{k(ij)}).$$

10. Доказать, что если тензор  $a_{ijk}$  симметричен по индексам  $i$  и  $j$ , то

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3} (a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij}).$$

11. Доказать, что если тензор  $a_{ijk}$  кососимметричен по индексам  $i$  и  $j$ , то

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3} (a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij}).$$

12. Разложить тензор  $a_{ij}$ , матрица которого

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

на симметричный  $(b_{ij})$  и кососимметричный  $(c_{ij})$  тензоры. Найти:

а)  $c_{ij}a_{ij}$ ; б)  $b_{ij}c_{ij}$ ; в)  $c_{ij}\delta_{ij}$ ; г)  $c_{ij}x_i$ , где  $x_i = (2, 3, -4)$ ;  
д)  $c_{ij}x_i x_j$ ; е)  $b_{ij}\delta_{ij}$ ; ж)  $b_{ij}x_i$ ; з)  $b_{ij}x_i x_j$ .

13. Найти характеристические поверхности следующих симметричных тензоров второй валентности:

а)  $a_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ ;

б)  $a_{ij} = \frac{1}{2} (a_i b_j + a_j b_i)$ .

При  $n=2$  вместо характеристических поверхностей естественно рассматривать характеристические кривые.

14. Найти уравнения и построить характеристические кривые симметричных тензоров третьей валентности со следующими компонентами:

а)  $a_{111} = a_{222} = 1$ ,  $a_{112} = a_{122} = 0$ ;

б)  $a_{111} = a_{222} = 0$ ,  $a_{112} = a_{122} = \frac{1}{3}$ ;

в)  $a_{111} = 1$ ,  $a_{122} = -1$ ,  $a_{112} = a_{222} = 0$ .

# ГЛАВА III

## ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ТЕНЗОРЫ ВТОРОЙ ВАЛЕНТНОСТИ

### § 1. Линейные преобразования

1. До сих пор мы рассматривали в линейном пространстве  $L$  скалярные функции одного или нескольких векторных аргументов. В настоящей главе будут рассматриваться векторные функции одного векторного аргумента. Изучение таких функций оказывается важным для многих разделов геометрии, механики и физики. Как мы увидим далее, важнейшие из таких функций — линейные — связаны с тензорами второй валентности, которые уже рассматривались в предыдущей главе.

Говорят, что в линейном пространстве  $L$  задана *векторная функция*  $A$  *векторного аргумента*  $x$ , если каждому вектору  $x$  этого пространства поставлен в соответствие некоторый вектор  $u = A(x)$  того же пространства. Векторная функция  $A$  называется *линейной*, если она обладает следующими двумя свойствами:

$$A(x + y) = A(x) + A(y),$$
$$A(\alpha x) = \alpha A(x),$$

где  $x$  и  $y$  — два любых вектора пространства  $L$  и  $\alpha$  — любое действительное число. Линейную вектор-функцию называют также *линейным преобразованием* пространства  $L$ , или *линейным оператором* в этом пространстве. В дальнейшем при обозначении линейной вектор-функции мы будем опускать



скобки всюду, где это не может привести к недоразумениям, и записывать ее в виде

$$u = Ax.$$

Геометрически первое из свойств, определяющих линейную вектор-функцию, означает, что диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $x$  и  $y$ , при линейном преобразовании  $A$  переходит в диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $u = Ax$  и  $v = Ay$  (рис. 5, а). Второе же свойство означает, что если длину вектора  $x$  увеличить в несколько раз, то длина вектора  $u = Ax$  увеличится во

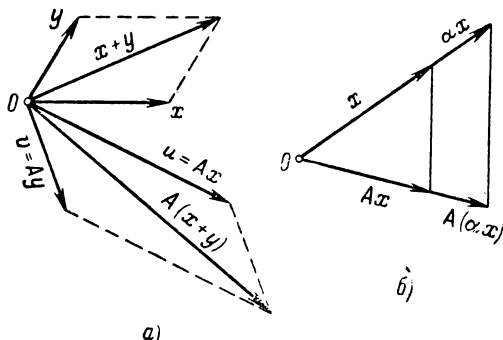


Рис. 5.

столько же раз (рис. 5, б). Отсюда следует, что при линейном преобразовании коллинеарные векторы переходят в коллинеарные, а компланарные — в компланарные.

2. Рассмотрим некоторые примеры линейных преобразований.

а) Преобразование, которое ставит в соответствие вектору  $x$  сам этот вектор, очевидно, является линейным. Оно называется *тождественным* преобразованием и обозначается буквой  $E$ , так что  $Ex = x$ .

б) Преобразование, которое ставит в соответствие вектору  $x$  вектор  $\lambda x$ , также является линейным. В самом деле, если  $Ax = \lambda x$ , то

$$A(x + y) = \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = Ax + Ay,$$

$$A(\alpha x) = \lambda(\alpha x) = \alpha(\lambda x) = \alpha Ax.$$

Геометрически линейное преобразование  $Ax = \lambda x$  представляет собой *однородное растяжение* (или *сжатие*) всех векторов пространства с одинаковым коэффициентом растяжения. Такое преобразование называется *гомотетией*. (При  $\lambda < 0$  растяжение всех векторов пространства сопровождается отражением их от начала координат.)

в) При  $\lambda = 0$  линейное преобразование, рассмотренное в предыдущем примере, ставит в соответствие любому вектору  $x$  нулевой вектор  $0$ . Это преобразование обозначают буквой  $N$  и называют *нулевым* преобразованием, так что  $Nx = 0$ .

г) Преобразование  $A(x) = x + a$  при  $a \neq 0$  не является линейным, так как  $A(y) = y + a$ ,  $A(x + y) = x + y + a$  и  $A(x) + A(y) = x + a + y + a = x + y + 2a \neq x + y + a$ .

Рассмотрим еще несколько примеров линейных преобразований в двумерном пространстве  $L_2$ , в котором задан ортонормированный базис  $\{e_1, e_2\}$ .

д) Преобразование  $A$ , которое вектору  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$  ставит в соответствие вектор  $u = Ax = x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2$ , представляет собой *геометрическое растяжение (сжатие) плоскости  $L_2$  в направлении, параллельном вектору  $e_2$*  (рис. 6). Докажем, что это преобразование будет линейным:

$$\begin{aligned} A(x + y) &= (x_1 + y_1) e_1 + \lambda (x_2 + y_2) e_2 = \\ &= (x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2) + (y_1 e_1 + \lambda y_2 e_2) = Ax + Ay, \\ A(\alpha x) &= (\alpha x_1) e_1 + \lambda (\alpha x_2) e_2 = \alpha (x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2) = \alpha Ax. \end{aligned}$$

е) При  $\lambda = 0$  рассмотренное выше преобразование сжата переходит в преобразование

$$A(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 e_1.$$

Это преобразование представляет собой *проектирование вектора  $x$  на ось  $x_1$* , порождаемую вектором  $e_1$ . Проектирование, следовательно, является линейным преобразованием.

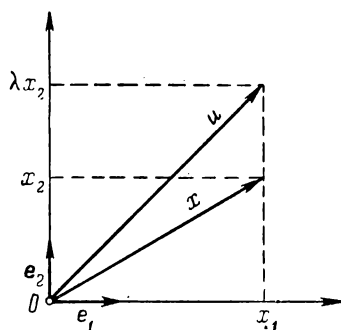


Рис. 6.

ж) Преобразование, которое ставит в соответствие каждому вектору  $x$  плоскости  $L_2$  вектор  $u$ , получающийся из вектора  $x$  поворотом на угол  $\alpha$ , будет, как легко проверить с помощью геометрического построения, линейным преобразованием (рис. 7). Его называют *преобразованием поворота*.

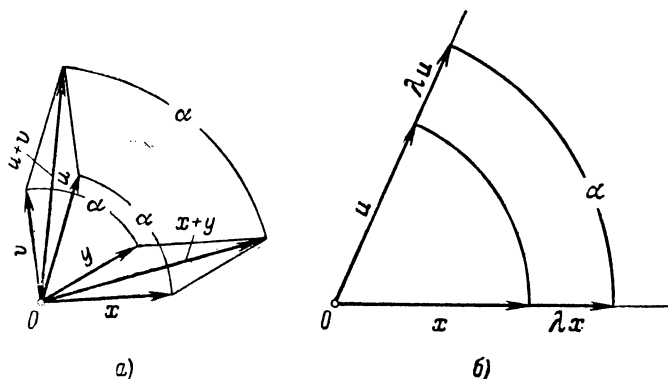


Рис. 7.

з) Преобразование, которое вектору  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$  ставит в соответствие вектор  $u = (x_1 + kx_2) e_1 + x_2 e_2$ , носит название *преобразование сдвига*; линейность этого преобразования доказывается так же, как в примере д). При этом

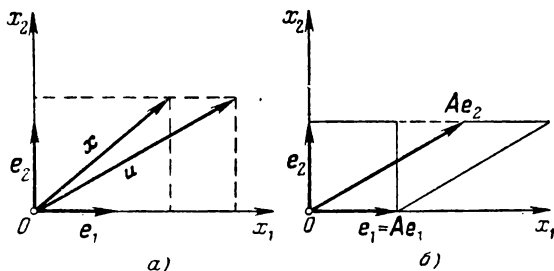


Рис. 8.

преобразовании конец вектора  $x$  перемещается по прямой, параллельной оси  $Ox_1$ , на величину  $kx_2$  (рис. 8, а); квадрат, построенный на векторах  $e_1$  и  $e_2$ , переходит в параллелограмм, построенный на векторах  $e_1$  и  $e_2 + ke_1$  (рис. 8, б).

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что любое линейное преобразование одномерного пространства сводится к умножению всех векторов на одно и то же число.

2. Пусть на плоскости  $L_2$  дан базис  $\{e_1, e_2\}$  и  $x_1, x_2$  — координаты произвольного вектора  $x$  относительно этого базиса. Установить, являются ли линейными следующие преобразования плоскости  $L_2$ :

- а)  $u = Ax = -x$ ;
- б)  $u = Ax = x_1 e_1 + x_1 e_2$ ;
- в)  $u = Ax = x_1 e_1 - 2x_2 e_2$ ;
- г)  $u = Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$ ;
- д)  $u = Ax = x_1^2 e_1$ .

Выяснить геометрический смысл этих преобразований.

3. Записать формулой и доказать линейность сжатия пространства  $L_3$  к оси  $e_2$ .

4. Преобразование, определяемое так же, как в примере д), в случае, если базисные векторы  $e_1$  и  $e_2$  не ортогональны, называется *косым сжатием*. Оно производится параллельно вектору  $e_2$  к вектору  $e_1$  — оси сжатия. Доказать линейность и выяснить геометрический смысл этого преобразования.

5. Установить, являются ли линейными, и выяснить геометрический смысл следующих преобразований пространства  $L_3$ :

- а)  $u = Ax = (ax) a$ ;
- б)  $u = Ax = (ax) x$ , где  $a \neq 0$ ;
- в)  $u = Ax = a$ ;
- г)  $u = Ax = a \times x$ ,

где  $a$  — фиксированный вектор;

- д)  $u = Ax = x_1 e_1 + x_2 e_2$ ;
- е)  $u = Ax = x_1 e_1 - x_2 e_2 - 2x_3 e_3$ ;
- ж)  $u = Ax = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \lambda x_3 e_3$ ;
- з)  $u = Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2 + \lambda_3 x_3 e_3$ ;
- и)  $u = Ax = x_3^2 e_2 + x_3 e_3$ ,

где через  $x_1, x_2, x_3$  обозначены координаты произвольного вектора  $x$  относительно некоторого базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

6. Доказать, что ортогональное проектирование векторов пространства  $L_3$  на ось, образующую равные углы с осями прямоугольной системы координат, является линейным преобразованием.

7. Доказать, что поворот пространства  $L_3$  на угол  $\frac{2\pi}{3}$  вокруг прямой, уравнение которой относительно прямоугольного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  есть  $x_1 = x_2 = x_3$ , является линейным преобразованием.

8. Доказать, что в пространстве многочленов степени, не превосходящей  $n$  (пример  $e$ ) § 1 гл. I), операция дифференцирования многочленов линейна\*).

9. Доказать линейность следующих преобразований, определенных в пространстве  $C[a, b]$  всех непрерывных на  $[a, b]$  функций:

$$a) g(t) = Af(t) = t \cdot f(t);$$

$$б) g(t) = Af(t) = f(t) \cdot \varphi(t),$$

где  $\varphi(t)$  — фиксированная функция, непрерывная на  $[a, b]$ ;

$$в) g(t) = Af(t) = \int_a^b H(t, s) f(s) ds,$$

где  $H(t, s)$  — фиксированная произвольная непрерывная функция двух аргументов.

Какие из указанных преобразований будут линейными и в пространстве многочленов степени, не превосходящей  $n$ ?

## § 2. Матрица линейного преобразования

1. Предположим, что в пространстве  $L_3$  выбран некоторый ортонормированный базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Разложение произвольного вектора  $x$  по этому базису имеет вид

$$x = x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Рассмотрим теперь в пространстве  $L_3$  линейное преобразование

$$u = Ax.$$

Обозначим через  $u_i$  координаты вектора  $u$  относительно базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Тогда

$$u = u_i e_i = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3.$$

Мы хотим найти зависимость координат вектора  $u$  от координат исходного вектора  $x$ .

Так как преобразование  $A$  линейное, то

$$Ax = A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 A e_1 + x_2 A e_2 + x_3 A e_3.$$

---

\*) Заметим, что та же операция будет линейной и в пространстве  $C[a, b]$ , но определена она будет только для дифференцируемых на  $[a, b]$  функций.

Запишем разложение векторов  $Ae_1$ ,  $Ae_2$ ,  $Ae_3$  по исходному базису в виде

$$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3,$$

$$Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3,$$

$$Ae_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3,$$

или в сокращенной форме:

$$Ae_i = a_{ki}e_k.$$

Подставляя эти разложения в выражение для вектора  $Ax$ , найдем

$$Ax = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)e_1 + \\ + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)e_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)e_3,$$

или, сокращенно,

$$Ax = a_{ik}x_k e_i.$$

Но  $Ax = u$ , поэтому координаты вектора  $u$  имеют вид

$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

или, короче,

$$u_i = a_{ik}x_k. \quad (1)$$

Полученные формулы дают возможность определить координаты вектора  $u$ , связанного с данным вектором  $x$  линейным преобразованием  $u = Ax$ . Они показывают, что координаты вектора  $u$  выражаются через координаты вектора  $x$  линейно и однородно.

Запишем коэффициенты формул, связывающих координаты векторов  $u$  и  $x$ , в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей линейного преобразования*  $A$  и обозначается буквой  $A$ , так что

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как в матрице  $A$  число строк и столбцов одинаково и равно трем, то она будет квадратной матрицей третьего порядка.

Таким образом, мы доказали, что *если в пространстве  $L_3$  задан базис, то всякому линейному преобразованию  $A$  этого пространства соответствует определенная квадратная матрица третьего порядка.*

Обратно, *если дана квадратная матрица  $A$  третьего порядка, то при заданном базисе ей будет соответствовать определенное линейное преобразование.* В самом деле, если дана матрица  $A$ , то с ее помощью можно построить векторную функцию  $u = Ax$ , определяемую формулами (1). В силу линейности и однородности этих формул построенная вектор-функция будет линейной.

Итак, *если в пространстве  $L_3$  задан некоторый базис  $e_1, e_2, e_3$ , то между линейными преобразованиями этого пространства и квадратными матрицами третьего порядка устанавливается взаимно однозначное соответствие.*

Рассмотрим теперь линейное преобразование  $u = Ax$  на плоскости  $L_2$ . Легко видеть, что если на этой плоскости задан базис  $\{e_1, e_2\}$ , то ее линейное преобразование  $A$  может быть записано в виде

$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

$$u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$

При этом

$$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2,$$

$$Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2.$$

Следовательно, в заданном базисе линейное преобразование плоскости  $L_2$  описывается квадратной матрицей второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Вообще, в  $n$ -мерном линейном пространстве  $L_n$  линейное преобразование  $u = Ax$  при заданном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  записывается в виде

$$u_i = a_{ik}x_k,$$

где индексы  $i$  и  $k$  принимают значения от 1 до  $n$  и по индексу  $k$  производится суммирование. Матрицей линейного преобразования в этом случае будет квадратная матрица  $A$  порядка  $n$ :

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Найдем теперь матрицы линейных преобразований, рассмотренных в предыдущем параграфе.

а) Так как при тождественном преобразовании  $u = Ex = x$ , то  $u_k = x_k$ , и в любом базисе матрица тождественного преобразования имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если использовать введенный в предыдущей главе симметричный символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

то эту матрицу можно переписать в виде

$$E = (\delta_{ij}).$$

Матрица  $E$  называется *единичной*.

б) При подобном преобразовании  $u = Ax = \lambda x$  координаты векторов  $u$  и  $x$  связаны соотношениями  $u_i = \lambda x_i$ . Поэтому матрица подобного преобразования в любом базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$



или

$$A = (\lambda \delta_{ij}).$$

в) При нулевом преобразовании  $u = Nx \equiv 0$  и  $u_k = 0$ . Поэтому матрица нулевого преобразования состоит из одних нулей:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $N$  называется *нулевой*.

Заметим, что матрицы тождественного, подобного и нулевого преобразований имеют указанный выше вид не только в трехмерном пространстве, но и в пространстве любого числа измерений.

г) Геометрическое растяжение (сжатие) плоскости в направлении, параллельном вектору  $e_2$ , ставит в соответствие вектору  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$  вектор  $u = x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2$ . Поэтому

$$u_1 = x_1,$$

$$u_2 = \lambda x_2,$$

и матрица этого преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

д) При  $\lambda = 0$  геометрическое сжатие становится проектированием на ось  $Ox_1$  параллельно вектору  $e_2$ . Матрица этого проектирования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

е) Чтобы найти матрицу поворота плоскости  $L_2$ , рассмотрим на ней ортонормированный базис  $\{e_1, e_2\}$ . Если преобразование  $A$  — поворот на угол  $\alpha$ , то

$$Ae_1 = e_1 \cos \alpha + e_2 \sin \alpha,$$

$$Ae_2 = -e_1 \sin \alpha + e_2 \cos \alpha$$

(рис. 9). Поэтому

$$\begin{aligned} u &= Ax = A(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 A e_1 + x_2 A e_2 = \\ &= (x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha) e_1 + (x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha) e_2 \end{aligned}$$

и

$$u_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha,$$

$$u_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.$$

Следовательно, матрица поворота плоскости  $L_2$  в прямоугольном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

ж) Сдвиг плоскости  $L_2$  в направлении вектора  $e_1$  ставит в соответствие вектору  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$  вектор  $u = (x_1 + kx_2) e_1 + x_2 e_2$ . Поэтому

$$u_1 = x_1 + kx_2,$$

$$u_2 = x_2$$

и матрица сдвига записывается так:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

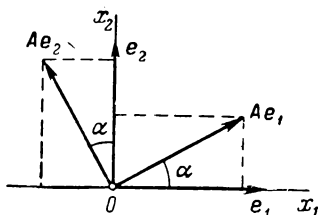


Рис. 9.

з) Рассмотрим на плоскости  $L_2$  еще преобразование, которое вектору  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$  ставит в соответствие вектор  $u = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$ . Это преобразование также будет линейным (упр. 5з) к § 1), и его матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Геометрически это преобразование представляет собой совокупность двух геометрических растяжений (сжатий) плоскости относительно взаимно перпендикулярных осей  $e_1$  и  $e_2$  с коэффициентами, соответственно равными  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Если какой-нибудь из коэффициентов растяжения отрицателен, например  $\lambda_1$ , то растяжение в  $\lambda_1$  раз сопровождается отражением от прямой  $e_2$ .

и) Точно так же в пространстве  $L_3$  преобразование, представляющее собой совокупность трех геометрических растяжений (сжатий) относительно взаимно перпендикулярных осей  $e_1, e_2, e_3$ , ставит в соответствие вектору  $x = x_i e_i$  вектор

$$u = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2 + \lambda_3 x_3 e_3.$$

Это преобразование будет линейным, и его матрица записывается так:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Матрицы такого вида, у которых все элементы вне главной диагонали равны нулю, называются *диагональными* матрицами. В частности, если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , рассматриваемое преобразование становится преобразованием гомотетии. Если  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , то это преобразование будет преобразованием гомотетии только в плоскости векторов  $e_1, e_2$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти матрицы линейных преобразований плоскости  $L_2$ , рассматриваемых в задачах 2 и 3 к § 1, относительно базиса  $\{e_1, e_2\}$ .

2. Доказать, что при преобразовании сжатия плоскости  $L_2$  (пример d) § 1) окружность с центром в начале координат переходит в эллипс, а равносторонняя гипербола, осями которой являются оси координат, — в гиперболу общего вида.

3. Найти матрицы линейных преобразований пространства  $L_3$ , рассмотренных в задачах 5, 6, 7 к § 1, относительно базиса  $\{e_2, e_2, e_3\}$ .

4. Доказать, что при преобразовании сжатия пространства  $L_3$  (упр. 5 ж) на стр. 87) сфера переходит в эллипсоид вращения, эллипсоид вращения

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

— в эллипсоид общего вида, однополостный и двуполостный гиперболоиды вращения

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = \pm 1$$

— в однополостный и двуполостный гиперболоиды общего вида.

5. Найти матрицу преобразования дифференцирования пространства многочленов  $P(t)$  степени, не превосходящей  $n$ ,

относительно следующих базисов:

а)  $1, t, t^2, \dots, t^n$ ;

б)  $1, t-a, \frac{(t-a)^2}{2!}, \dots, \frac{(t-a)^n}{n!}$ .

6. Доказать, что в пространстве  $L_3$  существует единственное линейное преобразование, переводящее линейно независимые векторы  $a_1, a_2, a_3$  в векторы  $b_1, b_2, b_3$  (не обязательно линейно независимые). Найти матрицу этого преобразования относительно некоторого прямоугольного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

7. В ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  составить матрицу линейного преобразования пространства  $L_3$ , переводящего векторы

$$a_1 = \{2, 3, 5\}, \quad a_2 = \{0, 1, 2\}, \quad a_3 = \{1, 0, 0\}$$

соответственно в векторы

$$b_1 = \{1, 1, 1\}, \quad b_2 = \{1, 1, -1\}, \quad b_3 = \{2, 1, 2\}.$$

8. Охарактеризовать геометрически линейные преобразования пространства  $L_3$ , матрицы которых относительно некоторого прямоугольного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  имеют следующий вид:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Доказать, что поворот пространства  $L_3$  на угол  $\alpha$  вокруг оси, определяемой единичным вектором  $\omega$ , является линейным преобразованием, определяемым формулой

$$Ax = (x\omega)\omega + [x - (x\omega)\omega] \cos \alpha + \omega \times x \sin \alpha.$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , если  $\omega = \omega_i e_i$ .

### § 3. Определитель матрицы линейного преобразования. Ранг матрицы

Отнесем пространство  $L_3$  к ортонормированному базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$  и рассмотрим в нем линейное преобразование  $u = Ax$ . Базисные векторы переходят при этом преобразовании в векторы

$$a_i = Ae_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + a_{i3}e_3.$$

Координаты векторов  $a_i$  составляют столбцы матрицы линейного преобразования  $A$ .

Вектор  $x = x_i e_i$  при преобразовании  $A$  перейдет в вектор  $u$ , где

$$u = Ax = x_i Ae_i = x_i a_i.$$

Следовательно, вектор  $u$  раскладывается по векторам  $a_i$  так же, как исходный вектор  $x$  по векторам  $e_i$ .

Рассмотрим единичный куб, построенный на базисных векторах  $e_1, e_2, e_3$ . Ориентированный объем  $V_e$  этого куба равен  $\pm 1$  в зависимости от того, будет ли тройка векторов  $e_1, e_2, e_3$  правой или левой. Если воспользоваться величиной  $\epsilon$ , введенной в § 5 гл. I, то можно записать, что  $V_e = \epsilon$ .

При преобразовании  $A$  куб, построенный на векторах  $e_1, e_2, e_3$ , перейдет в наклонный параллелепипед, построенный на векторах  $a_1, a_2, a_3$ . Ориентированный объем этого параллелепипеда равен смешанному произведению векторов  $a_1, a_2, a_3$ :

$$V_a = (a_1, a_2, a_3).$$

Используя выражение для смешанного произведения в координатах (§ 5 гл. I), получим

$$V_a = \epsilon \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель, содержащийся в этом выражении, отличается от определителя матрицы линейного преобразования  $A$  только тем, что в нем строки заменены столбцами. Так как величина определителя при этом не меняется, то

$$V_a = \epsilon |A|,$$

где через  $|A|$  обозначен определитель матрицы  $A$ .

Рассмотрим теперь произвольный параллелепипед, построенный на векторах  $x_1, x_2, x_3$ . При линейном преобразовании  $A$  он перейдет в параллелепипед, построенный на векторах

$$u_1 = Ax_1, \quad u_2 = Ax_2, \quad u_3 = Ax_3.$$

При этом векторы  $u_i$  раскладываются по векторам  $a_i$  таким же образом, как векторы  $x_i$  по векторам исходного базиса  $e_i$ . Поэтому, если обозначить через  $V_x$  объем параллелепипеда, построенного на векторах  $x_1, x_2, x_3$ , а через  $V_u$  — объем параллелепипеда, построенного на векторах  $u_1, u_2, u_3$ , то

$$\frac{V_u}{V_a} = \frac{V_x}{V_e}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{V_u}{V_x} = |A|.$$

Таким образом, *определитель матрицы линейного преобразования представляет собой коэффициент искажения объема при линейном преобразовании.*

Если  $|A| > 0$ , то ориентированные объемы  $V_u$  и  $V_x$  имеют одинаковый знак и, следовательно, преобразование  $A$  сохраняет ориентацию векторов; если же  $|A| < 0$ , то преобразование  $A$  меняет ориентацию векторов на противоположную.

Если  $|A| = 0$ , то

$$(a_1, a_2, a_3) = 0,$$

и векторы  $a_1, a_2, a_3$  будут линейно зависимы. Предположим, что они не коллинеарны, и обозначим через  $\pi$  плоскость, порожденную этими векторами. Тогда каждый вектор  $x = x_i e_i$  перейдет в вектор  $u = x_i a_i$ , лежащий в этой плоскости  $\pi$ . Следовательно, линейное преобразование  $A$  переводит все векторы пространства в векторы, лежащие в плоскости  $\pi$ . Если же векторы  $a_1, a_2, a_3$  коллинеарны, то преобразование  $A$  переводит все векторы пространства в векторы прямой  $l$ , на которой лежат векторы  $a_1, a_2, a_3$ . Наконец, если  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , то преобразование  $A$  переводит любой вектор  $x$  пространства  $L_3$  в нулевой вектор.

Если  $|A| = 0$ , то линейное преобразование  $A$  называется *вырожденным*. Но, как мы только что видели, степень вырождения преобразования  $A$  может быть различной. Чтобы определить ее, введем новое понятие — понятие ранга матрицы. *Рангом матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется наибольший порядок отличного от нуля определителя, содержащегося в этой матрице. Если  $|A| \neq 0$ , то ранг матрицы  $A$  равен трем. Если  $|A| = 0$ , но векторы  $a_1, a_2, a_3$  не коллинеарны, то, как легко видеть, в этой матрице найдется отличный от нуля определитель второго порядка, поскольку по крайней мере два столбца ее не пропорциональны, и ранг матрицы будет равен двум. Если  $|A| = 0$  и векторы  $a_1, a_2, a_3$  коллинеарны, то все определители второго порядка, содержащиеся в матрице, равны нулю, и ее ранг будет равен единице (конечно, при этом предполагается,

что хоть один из векторов  $a_1, a_2, a_3$  отличен от нуля!). Наконец, нулевой ранг имеет только нулевая матрица  $N$ .

Обратно, если ранг матрицы  $A$  равен двум, единице или нулю, то эта матрица будет содержать соответственно два линейно независимых столбца, один линейно независимый столбец или же все элементы матрицы  $A$  равны нулю. А это означает, что среди векторов  $a_1, a_2, a_3$  будет два линейно независимых или один или все они равны нулевому вектору.

Теперь мы подытожим предыдущие рассуждения в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Если ранг матрицы линейного преобразования  $A$  пространства  $L_3$  равен  $r$  ( $0 \leq r \leq 3$ ), то оно отображает это пространство на линейное пространство  $L_r$  размерности  $r$ .

Примером преобразования ранга два может служить проектирование векторов пространства на одну из координатных плоскостей параллельно третьему базисному вектору. Например, при проектировании на плоскость  $X_1OX_2$  вектору  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  ставится в соответствие вектор  $u = x_1e_1 + x_2e_2$ . При таком преобразовании

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2, \quad u_3 = 0,$$

и матрица этого преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Более общим преобразованием ранга два будет преобразование

$$u = a_1(b_1x) + a_2(b_2x),$$

где векторы  $a_1, a_2$  и  $b_1, b_2$  попарно не коллинеарны. Это преобразование отображает все векторы пространства на векторы плоскости, порожденной векторами  $a_1, a_2$ .

Примером преобразования ранга один является проектирование векторов пространства на какую-либо ось. Если направление этой оси определяется единичным вектором  $l_0$ , то проектирование на нее задается формулой

$$y = l_0(l_0x).$$

Более общим преобразованием ранга один будет преобразование

$$y = a(bx).$$

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулировать и доказать для плоскости  $L_2$  теорему, аналогичную доказанной в § 3 для пространства  $L_3$ .

2. Выяснить, какие из линейных преобразований, рассмотренных в § 1 и в упр. 2—8 на стр. 87, являются невырожденными и какие — вырожденными; для последних найти ранг соответствующей им матрицы.

3. Доказать, что указанные в тексте преобразования

а)  $u = a_1(b_1x) + a_2(b_2x),$

б)  $u = a(bx)$

— линейные, найти соответствующие им матрицы, считая координаты векторов  $a_1, a_2, b_1, b_2, a, b$  заданными, и убедиться, что ранг этих матриц равен соответственно двум и единице.

4. Выяснить геометрический смысл преобразований плоскости  $L_2$  и пространства  $L_3$ , которым в некотором ортонормированном базисе соответствуют матрицы:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$  б)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix};$  в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$

Определить ранги этих матриц.

5. Доказать, что невырожденность линейного преобразования  $A$  эквивалентна любому из следующих свойств:

а) из  $Ax = 0$  следует  $x = 0$ ;

б)  $A$  переводит три линейно независимых вектора линейного пространства  $L_3$  в три таких же вектора;

в)  $A$  — взаимно однозначное преобразование, т. е. из  $x \neq y$  следует  $Ax \neq Ay$ ;

г)  $A$  отображает пространство на все пространство, т. е. для любого вектора  $y \in L$  можно найти вектор  $x \in L$  такой, что  $Ax = y$ .

6. Доказать, что образ и прообраз линейного подпространства пространства  $L_3$  при линейном преобразовании  $A$  являются линейными подпространствами.

*Ядром* линейного преобразования  $A$  называется совокупность векторов  $L_3$ , которые  $A$  переводит в 0. Размерность ядра называется *дефектом преобразования A*. *Областью значений* преобразования  $A$  называется множество образов всех векторов  $L_3$  при преобразовании  $A$ , а размерность области значений называется *рангом A*.

7. Доказать, что

а) ранг преобразования  $A$  равен рангу матрицы  $A$ ;

б) сумма ранга и дефекта линейного преобразования  $A$  равна размерности пространства;



в) дефект линейного преобразования равен дефекту его матрицы (*дефектом матрицы* называется разность между ее порядком и рангом).

8. Доказать, что невырожденность линейного преобразования  $A$  эквивалентна одному из следующих свойств:

а) ядро  $A$  — нулевое, т. е. дефект  $A$  равен нулю;

б) область значений совпадает со всем пространством, т. е. ранг  $A$  равен размерности пространства.

9. Найти ядро, область значений, ранг и дефект линейных преобразований пространств  $L_2$  и  $L_3$ , которые в некотором прямоугольном базисе имеют матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Найти ядро, область значений, ранг и дефект линейного преобразования  $A$  — дифференцирования в пространстве многочленов, степень которых не превосходит  $n$ .

#### § 4. Линейные преобразования и билинейные формы

1. Пусть  $x$  и  $y$  — два произвольных вектора линейного пространства  $L_3$  и  $A$  — линейное преобразование этого пространства. Пусть  $u = Ay$  — вектор, получающийся в результате применения преобразования  $A$  к вектору  $y$ . Образует скалярное произведение векторов  $x$  и  $u$ . Тогда выражение

$$\varphi = xu = xAy$$

будет скалярной функцией векторных аргументов  $x$  и  $y$ . Эта скалярная функция, как легко видеть, является билинейной формой. В самом деле,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2, y) &= (x_1 + x_2)Ay = x_1Ay + x_2Ay = \\ &= \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y), \\ \varphi(x, y_1 + y_2) &= xA(y_1 + y_2) = x(Ay_1 + Ay_2) = \\ &= xAy_1 + xAy_2 = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2), \\ \varphi(\alpha x, y) &= \alpha xAy = \alpha \varphi(x, y), \\ \varphi(x, \alpha y) &= xA(\alpha y) = \alpha xAy = \alpha \varphi(x, y). \end{aligned}$$

Докажем теперь, что компоненты тензора второй валентности, определяемого билинейной формой  $\varphi = xAy$ , совпадают с элементами матрицы линейного преобразования  $A$ . Действительно, если в пространстве  $L_3$  задан ортонормированный базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , то

$$x = x_i e_i, \quad y = y_i e_i, \quad u = u_i e_i,$$

и так как  $u = Ay$ , то

$$u_i = a_{ij}y_j,$$

где  $A = (a_{ij})$  — матрица линейного преобразования  $A$ . Билинейная форма  $\varphi$  записывается теперь в виде

$$\varphi = x_i u_i = a_{ij} x_i y_j.$$

Это выражение показывает, что матрица коэффициентов билинейной формы  $\varphi$  совпадает с матрицей  $A = (a_{ij})$  линейного преобразования  $A$ . Но матрица коэффициентов билинейной формы  $\varphi$  образует, как мы знаем, тензор валентности два. Следовательно, *матрица линейного преобразования  $A$  также представляет собой тензор валентности два.*

Но легко видеть, что и, наоборот, *всякий тензор валентности два определяет в линейном пространстве  $L_3$  линейное преобразование.* В самом деле, пусть  $a_{ij}$  — такой тензор и  $x_i$  — координаты произвольного вектора  $x$  пространства. Свернув тензор  $a_{ij}$  с вектором  $x$ , получим координаты нового вектора  $u$ :

$$u_i = a_{ij} x_j.$$

Определенная таким образом вектор-функция, как легко доказать, будет линейной. Следовательно, тензор  $a_{ij}$  определяет в пространстве  $L_3$  линейное преобразование  $A$ , матрица которого совпадает с матрицей  $A = (a_{ij})$ , составленной из компонент этого тензора.

2. В § 4 гл. II (стр. 66) было доказано, что тензоры любой фиксированной валентности  $p$  образуют линейное пространство размерности  $3^p$ . В частности, это относится и к тензорам второй валентности. Поставим в соответствие сумме тензоров  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  линейное преобразование  $C$ , матрицей которого является тензор  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Это преобразование  $C$  называется *суммой преобразований  $A$  и  $B$* , матрицами которых служат тензоры  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$ :

$$C = A + B.$$

Точно так же произведению тензора  $a_{ij}$  на действительное число  $\lambda$  поставим в соответствие линейное преобразование  $D$ , матрица которого есть тензор  $d_{ij} = \lambda a_{ij}$ . Это преобразование называется *произведением преобразования  $A$  на число  $\lambda$* :

$$D = \lambda A.$$

Геометрически преобразование  $C$  можно осуществить следующим образом. Пусть  $x$  — произвольный вектор пространства  $L_3$  и  $y = Ax$ ,  $z = Bx$ ,  $u = Cx$ . Тогда (рис. 10, а)

$$u = y + z.$$

Действительно, обозначая через  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ ,  $u_i$  координаты соответствующих векторов относительно базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , получим

$$u_i = c_{ij}x_j = (a_{ij} + b_{ij})x_j = a_{ij}x_j + b_{ij}x_j = y_i + z_i.$$

Точно так же доказывается, что

$$Dx = (\lambda A)x = \lambda(Ax)$$

(рис. 10, б). Так как тензоры валентности два образуют

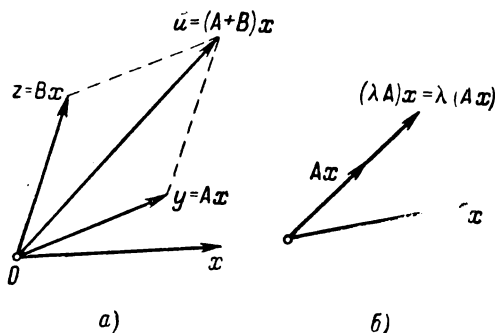


Рис. 10.

линейное пространство размерности 9, то и соответствующие им линейные преобразования также образуют линейное пространство той же размерности.

3. Кроме преобразования  $A$ , с тензором  $a_{ij}$  можно связать еще одно линейное преобразование, которое вектору  $x = x_i e_i$  ставит в соответствие вектор  $u$  с координатами

$$u_i = a_{ji}x_j;$$

здесь свертывание в правой части производится по первому индексу тензора  $a_{ij}$ . Это преобразование обозначают символом  $A^*$  и называют *сопряженным преобразованием по от-*

ношению к преобразованию  $A$ . Если положить  $a_{ij}^* = a_{ji}$ , то линейное преобразование  $A^*$  запишется в виде

$$u_i = a_{ij}^* x_j.$$

Следовательно, матрицей преобразования  $A^*$  служит матрица  $A^* = (a_{ij}^*)$ , получающаяся из матрицы  $A$  путем замены ее строк столбцами; такая операция называется операцией *транспонирования* матрицы  $A$ .

Рассмотрим теперь произвольную билинейную форму  $\varphi = \varphi(x, y)$ . В ортонормированном базисе  $\{e_i\}$  эта форма записывается в виде

$$\varphi(x, y) = a_{ij} x_i y_j.$$

Пусть  $A$  — линейное преобразование, матрица которого совпадает с матрицей  $A = (a_{ij})$  этой билинейной формы. Тогда форма  $\varphi$  может быть записана в виде

$$\varphi(x, y) = x_i (a_{ij} y_j) = x Ay.$$

Но можно провести другую группировку членов в билинейной форме  $\varphi$  и записать ее так:

$$\varphi(x, y) = y_j (a_{ij} x_i).$$

Вектор  $u$  с координатами  $u_j = a_{ij} x_i$  получается из вектора  $x = x_i e_i$  при помощи преобразования  $A^*$ . Поэтому билинейная форма  $\varphi$  может быть записана и так:

$$\varphi(x, y) = y A^* x.$$

Сравнивая два полученных выше выражения для формы  $\varphi(x, y)$ , находим, что

$$x Ay = y A^* x. \quad (1)$$

4. Линейное преобразование  $A$  называется *симметричным*, если оно совпадает с преобразованием  $A^*$ , сопряженным по отношению к  $A$ .

Докажем, что для того, чтобы линейное преобразование  $A$  было симметричным, необходимо и достаточно, чтобы связанная с ним билинейная форма  $\varphi(x, y) = x Ay$  была симметричной.

Пусть  $A = A^*$ . Тогда

$$x Ay = y A^* x = y Ax,$$

что и означает симметрию формы  $\varphi$ .

Пусть, обратно, форма  $\varphi$  симметрична. Это означает, что  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ , т. е.

$$x Ay = y Ax.$$

Сравнивая полученное равенство с соотношением (1), найдем, что

$$y Ax = y A^* x.$$

Так как это равенство должно выполняться для любого вектора  $y$ , то

$$Ax = A^* x.$$

А так как последнее равенство должно выполняться для любого вектора  $x$ , то  $A = A^*$ .

Из доказанного предложения следует, что матрица симметричного преобразования является симметричной, т. е. удовлетворяет условию  $a_{ij} = a_{ji}$ . В самом деле, ведь этим свойством обладает тензор, определяемый симметричной билинейной формой.

Далее, из того же предложения следует также, что *между симметричными линейными преобразованиями и квадратичными формами существует взаимно однозначное соответствие*, а именно: симметричному линейному преобразованию  $A$  с матрицей  $A = (a_{ij})$  соответствует квадратичная форма

$$\varphi = a_{ij} x_i x_j,$$

которая теперь может быть записана в виде

$$\varphi = x Ax.$$

Обратно, квадратичной форме  $\varphi = a_{ij} x_i x_j$  соответствует симметричное линейное преобразование с матрицей  $A = (a_{ij})$ .

Рассмотрим характеристическую поверхность тензора, соответствующую симметричному линейному преобразованию  $A$ . Уравнение этой поверхности, записанное раньше (гл. II, стр. 79) в виде

$$a_{ij} x_i x_j = 1,$$

может быть переписано так:

$$x Ax = 1.$$

Эту поверхность называют также *характеристической поверхностью симметричного линейного преобразования А*.

Докажем теперь, что вектор  $u = Ax$  имеет направление нормали к характеристической поверхности симметричного линейного преобразования  $A$ , проведенной в той ее точке  $M$ , для которой вектор  $OM$  коллинеарен вектору  $x$  (рис. 11). В самом деле, вектор нормали к поверхности, заданной в декартовой прямоугольной системе координат уравнением  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = c$ , имеет своими координатами величины  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ , так что  $n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i$ . Но

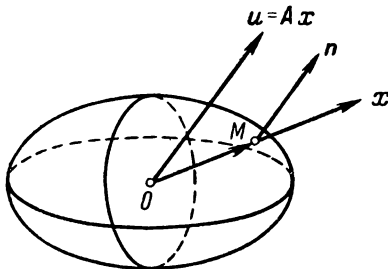


Рис. 11.

$$\varphi = a_{ij}x_i x_j$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2a_{ij}x_j = 2u_i,$$

что и доказывает наше утверждение.

5. Линейное преобразование  $A$  называется *антисимметричным*, если

$$A^* = -A.$$

Аналогично тому, как это было сделано для симметричного преобразования, можно доказать, что билинейная форма, соответствующая антисимметричному преобразованию, будет антисимметричной, и обратно. Отсюда непосредственно следует, что матрица антисимметричного линейного преобразования антисимметрична, т. е. удовлетворяет условию

$$a_{ij} = -a_{ji},$$

и, в частности,  $a_{ii} = 0$ .

Рассмотрим теперь вектор  $a = a_i e_i$ , где

$$a_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} a_{jk}.$$

Подставляя сюда значения компонент дискриминантного тензора (стр. 26), получим, что

$$a_1 = -\varepsilon a_{23}, \quad a_2 = -\varepsilon a_{31}, \quad a_3 = -\varepsilon a_{12},$$

где величина  $\varepsilon$  равна  $+1$  в правой и  $-1$  в левой системе координат. Поэтому матрица антисимметричного преобразования может быть записана так:

$$(a_{ij}) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажем теперь, что антисимметричное линейное преобразование  $A$  может быть представлено в виде

$$Ax = a \times x.$$

В самом деле, если  $y = Ax$ , то

$$y_1 = a_{1j}x_j = \varepsilon(-a_3x_2 + a_2x_3),$$

$$y_2 = a_{2j}x_j = \varepsilon(a_3x_1 - a_1x_3),$$

$$y_3 = a_{3j}x_j = \varepsilon(-a_2x_1 + a_1x_2).$$

Но выражения, стоящие в правой части этих формул, в точности совпадают с координатами векторного произведения векторов  $a$  и  $x$  (гл. I, стр. 27).

6. Найдем билинейные формы, соответствующие некоторым из линейных преобразований рассмотренных в предыдущих параграфах этой главы.

а) Тожественному преобразованию  $Ex = x$  будет соответствовать билинейная форма

$$\varphi(x, y) = xEy = xy,$$

совпадающая со скалярным произведением векторов  $x$  и  $y$ . Так как эта форма симметрична, то  $E$  — симметричное линейное преобразование. Соответствующая ему квадратичная форма имеет вид

$$\varphi(x, x) = xEx = x^2.$$

Поэтому его характеристической поверхностью будет единичная сфера  $x^2 = 1$ ,

б) Преобразованию гомотетии  $Ax = \lambda x$  соответствует билинейная форма

$$\varphi(x, y) = x(\lambda y) = \lambda(xy),$$

только множителем  $\lambda$  отличающаяся от предыдущей. Эта форма симметрична, так же как и преобразование гомотетии. Матрица билинейной формы  $\varphi$  и соответствующего ей преобразования гомотетии имеет вид  $(\lambda \delta_{ij})$ . Определяемый этой матрицей тензор иногда называют *шаровым*. Квадратичная форма, соответствующая преобразованию гомотетии, записывается в виде

$$\varphi(x, x) = xAx = \lambda x^2.$$

Его характеристической поверхностью будет сфера  $\lambda x^2 = 1$  радиуса  $R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ . Заметим, что коэффициент гомотетии  $\lambda$  может быть и отрицательным. В этом случае характеристической поверхностью будет сфера «мнимого» радиуса.

в) Преобразованию  $A$ , которое ставит в соответствие вектору  $x = x_i e_i$  вектор  $u = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2 + \lambda_3 x_3 e_3$ , соответствует билинейная форма  $\varphi(x, y) = xAy = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \lambda_3 x_3 y_3$ . Эта форма является симметричной. Таким же будет и преобразование  $A$ . Его матрицей является диагональная матрица (пример *и*) § 2), которая, конечно, симметрична. Квадратичная форма, соответствующая этому преобразованию, записывается в виде

$$\varphi(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2,$$

а ее характеристическая поверхность имеет уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1.$$

Полученное уравнение определяет центральную поверхность второго порядка, для которой координатные оси являются осями симметрии. Если все коэффициенты растяжения  $\lambda_i$  положительны, то эта поверхность будет *эллипсоидом*. Если два из чисел  $\lambda_i$  положительны, а одно отрицательно, то характеристической поверхностью будет *однополостный гиперболоид*. Если одно из чисел  $\lambda_i$  положительно, а два отрицательны, то характеристическая поверхность является *двуполостным гиперболоидом*. И, наконец, если все числа  $\lambda_i$  отрицательны, то характеристическая поверхность будет *мнимым эллипсоидом*. Если два какие-либо значения  $\lambda_i$  одинаковы, то характеристическая поверхность становится



*поверхностью вращения.* Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , то характеристическая поверхность становится *сферой*.

з) Преобразование поворота плоскости  $L_2$  вокруг точки  $O$  на угол  $\alpha$  определяется тензором, матрица которого, как мы видели на стр. 93, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Билинейная форма, соответствующая этому преобразованию, запишется так:

$$\varphi(x, y) = x Ay = x_1 y_1 \cos \alpha - x_1 y_2 \sin \alpha + x_2 y_1 \sin \alpha + x_2 y_2 \cos \alpha,$$

или

$$\varphi(x, y) = (x_1 y_1 + x_2 y_2) \cos \alpha - (x_1 y_2 - x_2 y_1) \sin \alpha.$$

Эта билинейная форма уже не является симметричной. Поэтому преобразование  $A^*$ , сопряженное преобразованию  $A$ , не совпадает с  $A$ . Его матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Геометрически преобразование  $A^*$  означает поворот вокруг точки  $O$  на угол  $-\alpha$ .

д) Преобразование сдвига плоскости  $L_2$  в направлении вектора  $e_1$  определяется тензором, матрица которого имеет вид (§ 2, пример ж))

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это преобразование не является симметричным, как и соответствующая ему билинейная форма

$$\varphi(x, y) = x Ay = x_1 y_1 + k x_1 y_2 + x_2 y_2.$$

Преобразование  $A^*$ , сопряженное преобразованию  $A$ , будет иметь матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Геометрически преобразование  $A^*$  также представляет собой сдвиг, но теперь уже в направлении вектора  $e_2$ .

Так как преобразования, рассмотренные в двух последних примерах, не являются симметричными, то для них не имеет смысла строить характеристические поверхности.

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать симметричность следующих линейных преобразований плоскости  $L_2$  ( $x_1$  и  $x_2$  — координаты произвольного вектора  $x$  плоскости  $L_2$ ):

- а)  $u = Ax = x_1 e_1$ ;
- б)  $u = Ax = -x$ ;
- в)  $u = Ax = x_1 e_1 - x_2 e_2$ ;
- г)  $u = Ax = x_1 e_1 + 3x_2 e_2$ ;
- д)  $u = Ax = x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2$ ;
- е)  $u = Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$ .

Найти соответствующие им квадратичные формы и характеристические кривые.

2. Прodelать то же для следующих линейных преобразований пространства  $L_3$  ( $x_1, x_2, x_3$  — координаты произвольного вектора  $x$  пространства  $L_3$ , а  $a$  и  $b$  — некоторые фиксированные векторы):

- а)  $u = Ax = x_2 e_2$ ;
- б)  $u = Ax = x_1 e_1 + x_2 e_2$ ;
- в)  $u = Ax = x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_3 e_3$ ;
- г)  $u = Ax = -x_1 e_1 + 2x_2 e_2 - x_3 e_3$ ;
- д)  $u = (ax) a$ ;
- е)  $u = (ax) a + (bx) b$ .

3. Найти сопряженные линейные преобразования для следующих линейных преобразований пространства  $L_3$ :

- а)  $u = Ax = (x_1 + 2x_2) e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ ;
- б)  $u = Ax = -x_2 e_1 + x_1 e_2 + x_3 e_3$ ;
- в)  $u = Ax = (ax) b$ ;
- г)  $u = Ax = (a_1 x) b_1 + (a_2 x) b_2$ ;
- д)  $u = Ax = a \times x$ .

Разложить эти преобразования на сумму их симметричной и антисимметричной частей.

4. Доказать следующие свойства сопряженных линейных преобразований (или транспонированных матриц):

- а)  $(A^*)^* = A$ ;
- б)  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ;
- в)  $(\lambda A)^* = \lambda A^*$ ;
- г)  $E^* = E$ .

5. Матрица  $B$  линейного преобразования  $B$  в некотором базисе совпадает с матрицей  $A^*$  преобразования  $A^*$ , сопряженного преобразованию  $A$ . Будет ли то же свойство выполняться в других базисах?

6. Доказать непосредственно, что сложение линейных преобразований (и матриц) и умножение их на число обладают следующими свойствами:

- а)  $A + B = B + A$ ;
- б)  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;
- в)  $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$ ;
- г)  $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$ ;
- д)  $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$ .

7. Доказать, что преобразование отражения от плоскости  $\pi$  в направлении прямой  $l$  будет симметричным линейным преобразованием в том и только в том случае, когда прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $\pi$ .

8. Пусть в пространстве  $C[a, b]$  скалярное произведение определено формулой (упр. 6 на стр. 23)

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

а) Доказать, что линейное преобразование (см. задачу 9а) к § 1), заключающееся в умножении на  $t$  всех элементов пространства  $C[a, b]$ , будет симметричным.

б) Доказать, что линейное преобразование (см. задачу 9в) к § 1)

$$Af(t) = \int_a^b H(t, s) f(s) ds,$$

где  $H(t, s)$  — фиксированная непрерывная функция двух переменных, для которой  $H(t, s) = H(s, t)$ , будет симметричным.

в) Доказать, что линейное преобразование

$$A(f) = f'(t)$$

будет антисимметричным, если  $f(a) = f(b) = 0$ .

г) Доказать, что линейное преобразование

$$A(f) = f''(t)$$

будет симметричным, если

$$f(a) = f(b), \quad f'(a) = f'(b).$$

### § 5. Умножение линейных преобразований и умножение матриц

1. Пусть в пространстве  $L_3$  задано два линейных преобразования  $A$  и  $B$ . Возьмем произвольный вектор  $x$  пространства и подвергнем его преобразованию  $A$ . Он перейдет при этом в вектор  $y = Ax$ . Подвергнем вектор  $y$  преобразованию  $B$ . Получим третий вектор  $z = By$ . Вектор  $z$  можно рассматривать как вектор-функцию векторного аргумента  $x$ :

$$z = Cx = B(Ax).$$

Легко видеть, что функция  $C$  будет линейным преобразованием, так как

$$\begin{aligned} C(x + y) &= B[A(x + y)] = B(Ax + Ay) = B(Ax) + \\ &\quad + B(Ay) = Cx + Cy, \\ C(\lambda x) &= B[A(\lambda x)] = B(\lambda Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda Cx. \end{aligned}$$

Линейное преобразование  $C$  называется *произведением* линейных преобразований  $A$  и  $B$ :

$$C = BA.$$

В этом произведении сомножители пишутся справа налево в том порядке, в каком производятся соответствующие преобразования.

Отметим основные свойства умножения линейных преобразований:

а) *Произведение линейных преобразований обладает сочетательным свойством:*

$$C(BA) = (CB)A.$$

В самом деле, пусть  $x$  — произвольный вектор. Тогда

$$\begin{aligned} [C(BA)]x &= C[(BA)x] = C[B(Ax)], \\ [(CB)A]x &= (CB)(Ax) = C[B(Ax)]. \end{aligned}$$

б) *Умножение любого преобразования на тождественное не меняет этого преобразования:*

$$AE = EA = A.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (AE)x &= A(Ex) = Ax, \\ (EA)x &= E(Ax) = Ax. \end{aligned}$$

Таким образом, при умножении линейных преобразований тождественное преобразование играет роль единицы.

в) Умножение линейных преобразований не коммутативно, т. е., вообще говоря,

$$AB \neq BA.$$

Покажем на примере справедливость этого неравенства. Пусть преобразование  $A$  — поворот плоскости  $L_2$  на  $90^\circ$  вокруг точки  $O$ , а преобразование  $B$  — проектирование век-

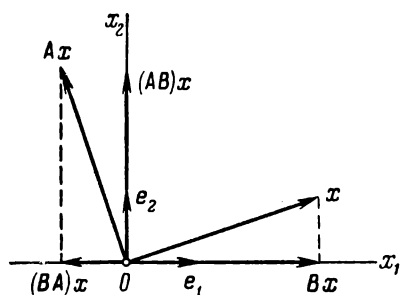


Рис. 12.

ров этой плоскости на ось  $Ox_1$  и  $x$  — произвольный вектор. Тогда легко видеть (рис. 12), что вектор  $(BA)x$  направлен по оси  $Ox_1$ , а вектор  $(AB)x$  — по оси  $Ox_2$ . Поэтому

$$(BA)x \neq (AB)x,$$

и, следовательно,

$$BA \neq AB.$$

Преобразования, для которых выполняется равенство  $AB = BA$ , называются *перестановочными*. Например, мы уже видели, что

$$AE = EA.$$

Точно так же, если преобразование  $A$  представляет собой геометрическое растяжение плоскости вдоль оси  $Ox_1$ , а  $B$  — геометрическое растяжение вдоль оси  $Ox_2$ , то снова

$$AB = BA.$$

В самом деле, если  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ , то

$$Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

$$Bx = x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$$

и

$$(AB)x = (BA)x = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2.$$

2. Пусть теперь в пространстве  $L_3$  задан базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Линейным преобразованием  $A$  и  $B$  в этом базисе соответ-

ствуют матрицы  $A$  и  $B$ , а преобразованию  $C=BA$  — матрица  $C$ . Эта матрица называется *произведением* матриц  $B$  и  $A$ :  $C=BA$ . Найдем, как выражаются элементы матрицы  $C$  через элементы матриц  $B$  и  $A$ .

Пусть  $A=(a_{ik})$ ,  $B=(b_{ik})$ . Тогда в базисе  $(e_1, e_2, e_3)$  линейное преобразование  $y=A x$  записывается в виде

$$y_k = a_{ki} x_i,$$

а линейное преобразование  $z=B y$  — в виде

$$z_j = b_{jk} y_k.$$

Линейное преобразование  $z=C x$  получим, исключая из этих соотношений  $y_k$ :

$$z_j = b_{jk} a_{ki} x_i.$$

Следовательно, элементами матрицы  $C$  будут величины

$$c_{ji} = b_{jk} a_{ki}.$$

Отсюда видно, что величины  $c_{ji}$  представляют собой компоненты тензора второй валентности, который получается при свертывании тензоров  $b_{jk}$  и  $a_{ki}$  по индексу  $k$ .

Запишем подробнее элементы матрицы  $C$ :

$$c_{ji} = b_{j1} a_{1i} + b_{j2} a_{2i} + b_{j3} a_{3i}.$$

Так как

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то можно заметить, что элемент  $c_{ji}$  матрицы  $C$  получается путем умножения элементов  $j$ -й строки матрицы  $B$  на соответствующие элементы  $i$ -го столбца матрицы  $A$  и сложения полученных произведений.

Подобным же путем можно определить умножение квадратных матриц любого порядка. Например, для матриц второго порядка оно будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Отмеченные выше основные свойства умножения линейных преобразований автоматически переносятся на умножение

матриц. Матрица тождественного преобразования  $E = (\delta_{ij})$  играет в этом умножении роль единицы, поэтому-то она и называется *единичной* матрицей. Умножение матриц, как и умножение преобразований, вообще говоря, не является перестановочным. Подтвердим этот факт следующим числовым примером:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2(-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем линейное преобразование, сопряженное произведению линейных преобразований  $A$  и  $B$ . Это преобразование  $(AB)^*$  определяется билинейной формой

$$x[(AB)y] = y[(AB)^*x].$$

Но  $(AB)y = A(By)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} x[(AB)y] &= x[A(By)] = (By)(A^*x) = (A^*x)(By) = \\ &= y[B^*(A^*x)] = y[(B^*A^*)x]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$y[(AB)^*x] = y[(B^*A^*)x].$$

Так как это соотношение должно выполняться для любых  $x$  и  $y$ , то

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Аналогичное соотношение имеет место и для матриц.

3. Докажем теперь следующее важное предложение:

*При умножении матриц их определители перемножаются.*

Пусть  $A$  и  $B$  — произвольные квадратные матрицы третьего порядка. В прямоугольном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  им будут соответствовать линейные преобразования  $A$  и  $B$ . Произведение  $C = BA$  этих матриц соответствует линейному преобразованию  $C = BA$ . Рассмотрим произвольный параллелепипед, образованный векторами  $x_1, x_2, x_3$ , и обозначим его ориентированный объем через  $V_x$ . При преобразовании  $A$  векторы  $x_i$  перейдут в векторы  $y_i = Ax_i$ , образующие параллелепипед, объем которого  $V_y = |A| V_x$ . А векторы  $y_i$

при преобразовании  $\mathbf{B}$  перейдут в векторы  $\mathbf{z}_i = \mathbf{B}\mathbf{y}_i$ , образующие параллелепипед с объемом  $V_z = |\mathbf{B}| V_y$ . Но, с другой стороны,  $\mathbf{z}_i = \mathbf{C}\mathbf{x}_i$ , и поэтому  $V_z = |\mathbf{C}| V_x$ . Следовательно,  $|\mathbf{C}| = |\mathbf{B}| |\mathbf{A}|$ , т. е.  $|\mathbf{BA}| = |\mathbf{B}| |\mathbf{A}|$ , что и требовалось доказать.

Эта теорема может быть доказана и чисто алгебраически, если воспользоваться хорошо известными свойствами определителей. Проведем доказательство для матриц второго порядка. Пусть

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}, \\ |\mathbf{C}| &= \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} \\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}a_{21} & b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} & b_{22}a_{22} \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} \\ b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{12}a_{21} & b_{12}a_{22} \\ b_{22}a_{21} & b_{22}a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Первый и четвертый из этих определителей равны нулю, так как их столбцы пропорциональны. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}| &= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{21}a_{12} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{B}| |\mathbf{A}|. \end{aligned}$$

Доказанное предложение называют также теоремой об умножении определителей. Из этой теоремы следует, что  $|\mathbf{BA}| = |\mathbf{AB}|$ . Кроме того, ясно, что если хотя бы одно из преобразований  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{B}$  вырожденное, то вырожденным будет и их произведение.

4. Умножение матриц, определенное в этом параграфе, дает возможность записать в новом виде формулы преобразования компонент матрицы линейного оператора  $\mathbf{A}$  при переходе к новому базису. Как мы уже видели, матрица  $\mathbf{A} = (a_{ij})$



линейного преобразования  $A$  представляет собой тензор второй валентности. При переходе от ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  к ортонормированному базису  $\{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}\}$ , определяемому уравнениями

$$e_{i'} = \gamma_{i'i} e_i,$$

компоненты такого тензора, как было показано в гл. II (стр. 57), преобразуются по формулам

$$a_{i'j'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} a_{ij}; \quad (1)$$

здесь  $\gamma_{i'i}$  — компоненты ортогональной матрицы  $\Gamma = (\gamma_{i'i})$ , определяющей преобразование базиса. Но для ортогональной матрицы  $\Gamma$  справедливы соотношения

$$\gamma_{i'i} = \gamma_{ii'},$$

где  $\gamma_{ii'}$  — элементы матрицы  $\Gamma^{-1}$ , определяющей переход от нового базиса к старому. В силу этих соотношений формулы (1) могут быть переписаны в виде

$$a_{i'j'} = \gamma_{i'i} a_{ij} \gamma_{j'j}.$$

Рассмотрим теперь правую часть последних формул. Легко видеть, что она представляет собой результат умножения матриц  $\Gamma$ ,  $A$  и  $\Gamma^{-1}$ . Если через  $A'$  обозначить матрицу линейного преобразования  $A$  в новом базисе  $\{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}\}$ , то можно переписать эти формулы в виде

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1}. \quad (2)$$

Такая запись формулы преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису оказывается очень удобной.

Докажем, пользуясь этой записью, что определитель матрицы линейного преобразования не меняется при переходе к новому базису. В самом деле, из теоремы об умножении определителей и равенства (2) следует, что

$$|A'| = |\Gamma| \cdot |A| \cdot |\Gamma^{-1}|.$$

Но

$$|\Gamma| = |\Gamma^{-1}| = \pm 1.$$

Поэтому

$$|A'| = |A|.$$

Это равенство показывает, что определитель линейного пре-

образования является инвариантом, и поэтому он должен иметь определенный геометрический смысл. И действительно, выше (§ 3) мы видели, что определитель линейного преобразования равен коэффициенту искажения объемов при этом преобразовании.

Заметим, что матрица  $\Gamma = (\gamma_{i'i})$ , определяющая переход от базиса  $\{e_i\}$  к новому базису  $\{e_{i'}\}$ , не является тензором, так как ее индексы  $i$  и  $i'$  относятся к различным системам координат, и она не определяет билинейной формы в пространстве  $L_3$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, что для линейных преобразований (и для матриц) имеют место следующие соотношения:

а)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B$ ;

б)  $(A+B)C = AC + BC$ ;

в)  $C(A+B) = CA + CB$ ;

г)  $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ ;

д)  $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ ;

е)  $(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$ ;

ж)  $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$ .

Как изменятся последние три формулы, если  $AB = BA$ ?

2. Доказать, что произведение двух сжатий к осям  $e_1$  и  $e_2$  прямоугольной декартовой системы координат с коэффициентами  $k$  и  $\frac{1}{k}$  переводит семейство гипербол  $x_1x_2 = c$  в себя. (Такое преобразование называется *гиперболическим поворотом* плоскости  $L_2$ .) Найти матрицу этого преобразования и доказать, что оно не меняет площадей фигур.

3. Доказать, что преобразование, равное произведению сжатия к оси  $e_1$  с коэффициентом  $\frac{a_1}{a_2}$ , поворота на угол  $\alpha$  и сжатия к оси  $e_2$  с коэффициентом  $\frac{a_2}{a_1}$ , переводит эллипс  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$  и гомотетичные ему эллипсы в себя. (Такое преобразование называется *эллиптическим поворотом* плоскости  $L_2$ .) Найти матрицу этого преобразования и доказать, что оно не меняет площадей фигур.

4. Доказать, что

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;      б)  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$ ,

и выяснить геометрический смысл этих равенств.

5. Найти  $A^n$  для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

6. Доказать, что если две симметричные матрицы перестановочны, то их произведение есть симметричная матрица.

7. Доказать, что если  $A$  и  $B$  — кососимметричные матрицы и  $AB = -BA$ , то  $AB$  — симметричная матрица.

8. Доказать, что

$$(Ax)(By) = x[(A^*B)y] = y[(B^*A)x],$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные линейные преобразования, а  $x$  и  $y$  — произвольные векторы.

9. Доказать, что если  $A$  — линейное преобразование, то  $AA^*$  — симметричное преобразование.

10. Доказать, что произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей.

11. Доказать, что след матрицы  $AB$  равен следу матрицы  $BA$  ( $A$  и  $B$  — квадратные матрицы одного порядка).

12. Доказать, что ранг произведения произвольного преобразования  $A$  и невырожденного преобразования  $B$  равен рангу  $A$ .

13. Доказать, что для произвольных линейных преобразований (или матриц)  $A$  и  $B$  линейного пространства  $L$

а)  $\text{ранг}(A+B) \leq \text{ранг} A + \text{ранг} B$ ;

б)  $\text{деф.}(AB) \leq \text{деф.} A + \text{деф.} B$ ;

в)  $\text{ранг}(AB) \leq \text{ранг} A$ ;

$\text{ранг}(AB) \leq \text{ранг} B$ .

14. Доказать, что если матрица  $A$  обладает тем свойством, что для любой матрицы  $B$

$$AB = BA,$$

то  $A = \lambda E$ .

15. Доказать, что если матрица  $A$  обладает тем свойством, что для любой диагональной матрицы  $B$

$$AB = BA,$$

то  $A$  — также диагональная матрица.

16. Найти все матрицы, перестановочные с матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

17. Найти все матрицы  $A$  второго порядка, для которых  $A^2 = N$ .

Матрица  $A$  называется *инволютивной*, если  $A^2 = E$ .

Матрица  $B$  называется *идемпотентной*, если  $B^2 = B$ .

18. Найти все инволютивные матрицы второго порядка.

19. Доказать, что если матрица обладает двумя из свойств: симметричная, ортогональная, инволютивная, то она обладает и третьим.

20. Проверить, идемпотентны ли матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

21. Доказать, что если  $B$  — идемпотентная матрица, то матрица

$$A = 2B - E$$

инволютивна, и, обратно, из инволютивности  $A$  вывести идемпотентность матрицы

$$B = \frac{1}{2} (A + E).$$

22. Пусть  $A$  — преобразование дифференцирования в пространстве многочленов степени, не превосходящей  $n$ . В базисе  $1, t, t^2, \dots, t^n$  найти матрицы преобразований  $A, A^2, \dots$ . Доказать, что  $A^{n+1} = 0$ . Найти ядро, область значений, ранг и дефект преобразований  $A^2, A^3, \dots, A^{n+1}$  (ср. с задачей 10 к § 3).

23. Пусть  $A$  — преобразование дифференцирования в пространстве всех многочленов, а  $B$  — операция умножения на независимое переменное:

$$A[P(t)] = P'(t), \quad B[P(t)] = tP(t).$$

Доказать, что

$$a) AB - BA = E;$$

$$б) AB^n - B^n A = nB^{n-1}.$$

Почему преобразование  $B$  нельзя рассматривать в пространстве многочленов степени, не превосходящей  $n$ ?

## § 6. Обратное линейное преобразование и обратная матрица

1. Рассмотрим некоторое линейное преобразование  $y = Ax$ . Преобразование  $B$  называется *обратным* для преобразования  $A$ , если  $By = B(Ax) = x$ , т. е. если оно возвращает вектор  $y$  в исходное положение  $x$ . Таким образом, обратное преобразование  $B$  определяется равенством

$$BA = E,$$

где  $E$  — тождественное преобразование. Легко видеть, что преобразование  $B$ , обратное  $A$ , будет линейным преобразованием. Не для всякого линейного преобразования  $A$  существует

обратное. Пусть, например, преобразование  $A$  — проектирование пространства на плоскость  $x_1Ox_2$ . Тогда образы всех векторов пространства лежат на этой плоскости, и если мы возьмем вектор  $y$ , не лежащий на ней, то он не будет иметь прообраза. Далее мы докажем, что каждое невырожденное преобразование имеет обратное.

Преобразование, обратное преобразованию  $A$ , обозначают через  $A^{-1}$ , так что

$$A^{-1}A = E.$$

Очевидно, что  $(A^{-1})^{-1} = A$  и  $AA^{-1} = E$ .

Пусть преобразование  $A$  имеет обратное и  $A$  — матрица преобразования  $A$  в некотором базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Матрицу преобразования  $A^{-1}$  называют *обратной* матрицей для матрицы  $A$  и обозначают через  $A^{-1}$ . Так как при перемножении преобразований их матрицы перемножаются, то

$$A^{-1}A = E \quad \text{и} \quad AA^{-1} = E,$$

где  $E$  — единичная матрица.

Из последнего равенства следует, что

$$|A^{-1}| |A| = 1,$$

т. е. *произведение определителей взаимно обратных матриц равно единице*. Значит, если матрица  $A$  имеет обратную, то ее определитель отличен от нуля:  $|A| \neq 0$ .

2. Докажем теперь, что *если  $A$  — невырожденное линейное преобразование, то оно имеет обратное преобразование  $A^{-1}$ , и притом только одно*.

Линейное преобразование  $y = Ax$  в произвольном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  записывается в форме

$$y_i = a_{ik}x_k, \quad (1)$$

где  $(a_{ik}) = A$  — матрица преобразования  $A$ . Найти обратное преобразование — это значит найти вектор  $x$  по заданному вектору  $y$ . Эта задача будет решена, если выразить координаты вектора  $x$  через координаты вектора  $y$ , т. е. если разрешить предыдущие уравнения относительно  $x_k$ . Но система, состоящая из трех линейных уравнений с тремя неизвестными  $x_1, x_2, x_3$ , имеет единственное решение при любых  $y_i$ , если только определитель этой системы отличен от нуля, т. е. если  $A$  — невырожденное линейное преобразование.

Найдем теперь матрицу  $A^{-1}$  преобразования  $A^{-1}$ , обратного  $A$ , считая, что  $|A| \neq 0$ . Для этого перепишем уравнения (1) более подробно в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3. \end{aligned} \right\}$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля, то для ее решения можно применить известные формулы Крамера. Например,

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если обозначить через  $A_{ik}$  алгебраическое дополнение элемента  $a_{ik}$  в определителе  $|A|$ , то предыдущее выражение примет вид

$$x_1 = \frac{A_{11}}{|A|} y_1 + \frac{A_{21}}{|A|} y_2 + \frac{A_{31}}{|A|} y_3.$$

Аналогично для  $x_2$  и  $x_3$  получим

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{A_{12}}{|A|} y_1 + \frac{A_{22}}{|A|} y_2 + \frac{A_{32}}{|A|} y_3, \\ x_3 &= \frac{A_{13}}{|A|} y_1 + \frac{A_{23}}{|A|} y_2 + \frac{A_{33}}{|A|} y_3. \end{aligned}$$

Коэффициенты при  $y_k$ , стоящие в этих разложениях, и являются элементами искомой обратной матрицы. Если обозначить элементы обратной матрицы через  $\tilde{a}_{ik}$ ,  $A^{-1} = (\tilde{a}_{ik})$ , то можно записать

$$\tilde{a}_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|},$$

т. е. элемент  $\tilde{a}_{ik}$  обратной матрицы равен алгебраическому дополнению элемента  $a_{ki}$  исходной матрицы, деленному на ее определитель.

Матрица  $\tilde{a}_{ik}$  линейного преобразования  $A^{-1}$  является тензором второй валентности. Этот тензор называется *обратным* для тензора  $a_{ik}$ , соответствующего линейному преобразованию  $A$ .

Пусть теперь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица второго порядка. Для нее обратная матрица найдется аналогичным способом. Но

$$A_{11} = a_{22}, \quad A_{21} = -a_{12}, \quad A_{12} = -a_{21}, \quad A_{22} = a_{11}.$$

Поэтому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & -\frac{a_{12}}{|A|} \\ -\frac{a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Пусть, например,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Тогда  $|A| = 1$  и  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ . Непосредственным умножением легко проверить, что  $AA^{-1} = E$ .

Найдем соотношения, которым удовлетворяют элементы взаимно обратных матриц. Пусть  $A = (a_{ik})$ ,  $A^{-1} = (\tilde{a}_{ik})$ . Тогда  $A^{-1}A = E$ ,  $AA^{-1} = E$ . Пользуясь правилом умножения матриц, выведенным в предыдущем параграфе, мы получим отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ik}a_{kj} &= \delta_{ij}, \\ a_{ik}\tilde{a}_{kj} &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

где в левой части по индексу  $k$ , как всегда, производится суммирование, а в правой — стоит симметричный символ Кронекера.

Отметим еще одно соотношение, связанное с обращением произведения линейных преобразований:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

которое доказывается непосредственно:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$

Аналогичное соотношение имеет место и для матриц.

Обратим внимание еще на то, что матрица  $\Gamma^{-1}$  — матрица перехода от нового базиса  $e_i'$  к старому базису  $e_i$  (см. стр. 33 и 116) — будет обратной матрицей по отношению к матрице  $\Gamma$  перехода от старого базиса к новому. Поэтому  $\Gamma\Gamma^{-1} = E$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти обратную матрицу для каждой из следующих матриц:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}; & \text{б) } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \\ \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}; & \text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

2. Решить следующие уравнения, данные в матричной форме:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}; \\ \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \end{array}$$

в)  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix};$$

г)  $XA = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}.$$

3. Доказать, что для невырожденных линейных преобразований (для невырожденных матриц) выполняются следующие соотношения:

$$\text{а) } (A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1};$$

$$\text{б) } (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m;$$

$$\text{в) } (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

4. Доказать, что для невырожденных матриц следующие четыре соотношения эквивалентны друг другу:

$$AB = BA; \quad AB^{-1} = B^{-1}A; \quad A^{-1}B = BA^{-1}; \quad A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

5. Доказать, что

а) матрица, обратная к невырожденной симметричной, будет симметричной;

б) матрица, обратная к невырожденной кососимметричной, будет кососимметричной;

в) матрица, обратная к ортогональной, будет ортогональной.



6. Доказать, что матрица, обратная для невырожденной треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

будет матрицей того же вида.

### § 7. Группа линейных преобразований и ее подгруппы

1. Рассмотрим совокупность невырожденных линейных преобразований трехмерного линейного пространства. В этой совокупности определена операция умножения преобразований, обладающая следующими свойствами:

а) Совокупность невырожденных преобразований замкнута относительно умножения, так как  $C = AB$  — невырожденное преобразование, если  $A$  и  $B$  не вырождены.

б) Операция умножения преобразований подчиняется сочетательному закону:  $A(BC) = (AB)C$ .

в) Совокупности невырожденных преобразований принадлежит тождественное преобразование  $E$  такое, что  $AE = EA = A$ .

г) Для каждого невырожденного преобразования  $A$  существует единственное обратное преобразование  $A^{-1}$  такое, что  $AA^{-1} = E$ .

Этими свойствами обладает умножение не только линейных преобразований. Например, для совокупности всех положительных рациональных чисел обычное умножение также обладает перечисленными выше четырьмя свойствами, то же самое можно сказать и об умножении во множестве отличных от нуля комплексных чисел. Число таких примеров легко увеличить. Любое множество элементов, в котором определена операция умножения, обладающая перечисленными выше свойствами, называется *группой*.

Таким образом, совокупность невырожденных линейных преобразований трехмерного линейного пространства образует группу. Эту группу называют *полной линейной группой третьего порядка* и обозначают через  $GL_3$ .

Так как каждому невырожденному линейному преобразованию пространства  $L_3$  при заданном базисе соответствует квадратная матрица третьего порядка с определителем, отличным от нуля, и умножению преобразований соответствует

умножение матриц, то эти матрицы также образуют группу. По существу, эта группа ничем не отличается от группы линейных преобразований, и ее мы тоже будем называть полной линейной группой и обозначать через  $GL_3$ .

Точно так же совокупность невырожденных линейных преобразований векторов плоскости образует группу — *полную линейную группу второго порядка*, обозначаемую через  $GL_2$ . Матрицы второго порядка с определителями, отличными от нуля, образуют такую же группу. Вообще, совокупность невырожденных линейных преобразований пространства  $L_n$ , так же как и совокупность квадратных матриц  $n$ -го порядка с определителями, отличными от нуля, образует группу  $GL_n$  — *полную линейную группу порядка  $n$* .

2. Но не только вся совокупность невырожденных линейных преобразований трехмерного пространства образует группу. В этой совокупности имеются подмножества, которые также замкнуты относительно умножения и вместе с каждым своим элементом содержат обратный ему элемент, а значит, образуют группу (что касается свойств б) и в), то они для подмножества выполняются автоматически: свойство сочетательности, справедливое для всего множества, выполняется и для подмножества, а тождественное преобразование принадлежит подмножеству, поскольку последнее вместе с каждым преобразованием  $A$  содержит обратное к нему преобразование  $A^{-1}$ , а также их произведение  $AA^{-1} = E$ ). Такие группы называются *подгруппами* полной линейной группы. Рассмотрим несколько примеров таких подгрупп.

а) Пусть преобразование  $A$  пространства  $L_3$  не меняет ориентацию некомпланарных троек векторов. Определитель матрицы  $A$  такого преобразования будет положительен,  $|A| > 0$ . Произведение двух преобразований, не меняющих ориентации тройки векторов, очевидно, также не меняет их ориентации. Таким же свойством обладает и преобразование  $A^{-1}$ , обратное преобразованию  $A$ . Поэтому совокупность таких преобразований образует группу, которая является подгруппой группы  $GL_3$ . Этой группе соответствует группа матриц третьего порядка с положительными определителями. Заметим, что совокупность матриц с отрицательными определителями группы не образует, так как произведением двух матриц с отрицательными определителями будет матрица с положительным определителем.

б) Пусть преобразование  $A$  не меняет абсолютной величины объема параллелепипеда, натянутого на любые три вектора. Тогда абсолютная величина определителя матрицы этого преобразования равна единице,  $|A| = \pm 1$ . Преобразования, обладающие этим свойством, как и их матрицы, очевидно, образуют группу. Эта группа называется *унимодулярной* группой. Подгруппу унимодулярной группы образуют преобразования, сохраняющие и объем, и ориентацию тройки векторов. Для таких преобразований  $|A| = 1$ .

в) Рассмотрим совокупность поворотов плоскости  $L_2$  вокруг начала координат. Эта совокупность является группой, так как произведение двух поворотов, очевидно, также является поворотом, как и преобразование, обратное к повороту. Подтвердим это формальной выкладкой. В самом деле, если

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

— матрицы поворота на угол  $\alpha$  и угол  $\beta$ , то

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

— матрица поворота на угол  $\alpha + \beta$  и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

— матрица поворота на угол  $-\alpha$ .

3. Рассмотрим еще одну важную подгруппу полной линейной группы — подгруппу ортогональных преобразований. Линейное преобразование  $A$  называется *ортогональным*, если оно не меняет величину скалярного произведения векторов. Это значит, что если  $A$  — ортогональное преобразование,  $x$  и  $y$  — два произвольных вектора и  $u = Ax$ ,  $v = Ay$ , то

$$uv = xy.$$

Докажем прежде всего, что ортогональные преобразования сохраняют длины векторов и углы между ними. В самом деле, если  $A$  — ортогональное преобразование и  $u = Ax$ , то  $u^2 = x^2$ , откуда следует, что  $|u| = |x|$ . Пусть, далее,  $v = Ay$ ,

$\varphi$  — угол между векторами  $x$  и  $y$  и  $\psi$  — угол между векторами  $u$  и  $v$ . Так как

$$\cos \varphi = \frac{xy}{|x||y|} \quad \text{и} \quad \cos \psi = \frac{uv}{|u||v|},$$

то  $\cos \varphi = \cos \psi$ , и так как угол между векторами изменяется в пределах от 0 до  $\pi$ , то  $\varphi = \psi$ . Поэтому ортогональные преобразования пространства  $L_3$  называют также *вращениями*.

Заметим, что если потребовать от преобразования  $A$  только сохранения длин векторов, то уже этого достаточно для того, чтобы оно было ортогональным. В самом деле, пусть преобразование  $A$  оставляет неизменными длины векторов и  $u = Ax$ ,  $v = Ay$ . Тогда  $u + v = A(x + y)$ ,  $|u + v| = |x + y|$  и  $(u + v)^2 = (x + y)^2$ , откуда

$$u^2 + 2uv + v^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Так как  $u^2 = x^2$  и  $v^2 = y^2$ , то

$$uv = xy,$$

что и требовалось доказать.

Докажем следующую теорему.

**Теорема.** *Для того чтобы линейное преобразование  $A$  было ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло соотношению*

$$A^*A = E. \quad (1)$$

В самом деле, пусть  $u = Ax$  и  $v = Ay$ . Тогда, пользуясь свойствами билинейной формы, доказанными в § 5 (см. также упр. 8 на стр. 118), получим

$$uv = (Ax)(Ay) = x[(A^*A)y].$$

Если  $A^*A = E$ , то  $uv = xy$  и  $A$  — ортогональное преобразование. Обратно, если  $A$  — ортогональное преобразование, то  $uv = xy$  и  $A^*A = E$ .

Соотношение (1), которому удовлетворяет ортогональное преобразование, может быть записано в виде

$$A^* = A^{-1}.$$

Докажем теперь, что ортогональные преобразования образуют группу. Пусть  $A$  и  $B$  — ортогональные преобразования, тогда

$$A^* = A^{-1}, \quad B^* = B^{-1}.$$

Если  $C = AB$ , то

$$C^* = (AB)^* = B^* A^* = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1} = C^{-1}.$$

Следовательно,  $C$  — ортогональное преобразование. А это означает, что совокупность ортогональных преобразований замкнута по отношению к операции умножения. Далее, если  $A$  — ортогональное преобразование, то этим же свойством обладает и преобразование  $A^{-1}$ . В самом деле, из того, что  $A^* = A^{-1}$ , следует, что

$$(A^{-1})^* = (A^*)^* = A = (A^{-1})^{-1}.$$

А это означает ортогональность преобразования  $A^{-1}$ . Следовательно, ортогональные преобразования образуют группу. Эту группу обозначают через  $O_3$ . Она, конечно, является подгруппой полной линейной группы  $GL_3$ .

Заметим, что доказать групповой характер совокупности ортогональных преобразований можно чисто геометрически. Действительно, если преобразования  $A$  и  $B$  не меняют длин векторов и углов между ними, то и их произведение  $AB$  обладает этим свойством, так же как и преобразования  $A^{-1}$  и  $B^{-1}$ .

Рассмотрим теперь матрицы ортогональных преобразований — так называемые *ортогональные матрицы*. С такими матрицами мы уже встречались, когда рассматривали преобразования ортогонального базиса (гл. I, § 6). В силу соотношения (1) матрица  $A = (a_{ij})$  ортогонального преобразования  $A$  удовлетворяет условию

$$A^* A = E$$

и равносильному условию

$$A A^* = E.$$

Если обозначить через  $a_{ij}^*$  элемент матрицы  $A^*$ , то  $a_{ij}^* = a_{ji}$ . Поэтому написанные выше условия в координатной форме запишутся так:

$$\begin{aligned} a_{ik}^* a_{kj} &= a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}, \\ a_{ik} a_{kj}^* &= a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2)$$

Первое из этих соотношений означает, что *сумма квадратов элементов какого-либо столбца ортогональной матрицы равна единице* (случай  $i = j$ ), а *сумма произведений соответствующих элементов различных ее столбцов равна*

нулю (случай  $i \neq j$ ). Второе соотношение означает то же самое для строк ортогональной матрицы. Заметим, что соотношения (2) только обозначениями отличаются от формул (6) из § 6 гл. I.

Ранее (гл. I, стр. 34) было доказано геометрически, что определитель ортогональной матрицы равен  $\pm 1$ . Теперь можно дать простое аналитическое доказательство этого утверждения. Из соотношения  $A^*A = E$  и теоремы об умножении определителей следует, что

$$|A^*A| = |A^*| |A| = |A|^2 = 1,$$

так как  $|A^*| = |A|$  и  $|E| = 1$ . Отсюда непосредственно следует, что  $|A| = \pm 1$ .

Ортогональные преобразования, определитель матрицы которых равен  $+1$ , сохраняют ориентацию троек векторов и называются *собственными вращениями*. Собственные вращения, как легко видеть, образуют группу, являющуюся подгруппой группы  $O_3$ . Ее обозначают через  $O_3^+$  и называют *подгруппой собственных вращений*.

Ортогональные преобразования, определитель матрицы которых равен  $-1$ , меняют ориентацию троек векторов и называются *несобственными вращениями*. Несобственные вращения, конечно, группы не образуют (почему?). К несобственным вращениям относятся, например, преобразования, состоящие в отражении пространства относительно некоторой плоскости  $\pi$ , проходящей через начало координат  $O$ . В самом деле, при отражении пространства относительно плоскости  $\pi$  длины векторов и углы между ними сохраняются, а ориентация троек векторов меняется на противоположную. Легко доказать, что любое несобственное вращение можно представить в виде произведения собственного вращения и отражения относительно некоторой плоскости.

4. Все рассмотренные до сих пор подгруппы полной линейной группы, как и сама эта группа, состоят из бесконечного числа элементов. Но существуют такие подгруппы этой группы, которые состоят из конечного числа элементов, — так называемые *конечные подгруппы*. Особенно интересны конечные подгруппы ортогональной группы, которые называют *группами симметрии*. Эти группы имеют важное значение для кристаллографии и других разделов физики.

Рассмотрим некоторые примеры групп симметрии на плоскости и в пространстве.

а) Пусть  $E$  — тождественное преобразование и  $A = -E$  — преобразование, состоящее в отражении всех векторов пространства от начала координат. Для этих преобразований мы имеем

$$EE = E, \quad EA = AE = A, \quad AA = E, \\ E^{-1} = E, \quad A^{-1} = A.$$

Следовательно, совокупность преобразований, состоящая из двух элементов  $E$  и  $A$ , замкнута относительно операции умножения и операции обращения, а значит, она представляет собой группу. Таблица умножения элементов этой группы может быть записана в виде

I \ II		
	$E$	$A$
$E$	$E$	$A$
$A$	$A$	$E$

Произведение любых двух сомножителей этой группы не зависит от их порядка. Такие группы называются *коммутативными*. Преобразования этой группы переводят в себя любую фигуру, для которой точка  $O$  является центром симметрии.

б) Пусть  $E$  — тождественное преобразование плоскости и  $A$  — поворот плоскости на угол  $\frac{2\pi}{n}$ . Тогда преобразование  $A^k$  представляет собой поворот плоскости на угол  $\frac{2\pi k}{n}$ , в частности,  $A^n = E$ . Преобразования  $E, A, A^2, \dots, A^{n-1}$  образуют группу, так как

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l} = A^m,$$

где  $m$  — остаток от деления числа  $k+l$  на  $n$ . Эта группа тоже будет коммутативной. Она называется *циклической группой  $n$ -го порядка*.

в) Пусть  $a, b, c$  — три взаимно перпендикулярные оси пространства  $L_3$ , проходящие через точку  $O$ , и  $A, B, C$  — пре-

образования, представляющие собой поворот на угол  $\pi$  вокруг соответствующей оси. Четыре преобразования  $E, A, B, C$  образуют группу с таблицей умножения

I \ II				
	$E$	$A$	$B$	$C$
$E$	$E$	$A$	$B$	$C$
$A$	$A$	$E$	$C$	$B$
$B$	$B$	$C$	$E$	$A$
$C$	$C$	$B$	$A$	$E$

Так как произведение любых элементов этой группы не зависит от порядка сомножителей, то эта группа будет коммутативной. Преобразования этой группы переводят в себя любую фигуру, для которой оси  $a, b, c$  являются осями симметрии.

2) Пусть  $a$  и  $b$  — две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через точку  $O$ , и  $A$  — поворот на угол  $\frac{2\pi}{3}$  вокруг оси  $a$ , а  $B$  — поворот на угол  $\pi$  вокруг оси  $b$ . Рассмотрим преобразования

$$E, A, A^2, B, AB, A^2B.$$

Докажем, что эти преобразования образуют группу. Заметим, что преобразование  $B_1 = AB$  представляет собой поворот на угол  $\pi$  вокруг оси  $b_1$ , получающейся из оси  $b$  при преобразовании  $A^2$ . Точно так же преобразование  $B_2 = A^2B$  есть поворот на угол  $\pi$  вокруг оси  $b_2$ , получающейся из оси  $b$  при преобразовании  $A$ . Поэтому

$$B^2 = B_1^2 = B_2^2 = E.$$

Кроме того, пользуясь тем, что  $A^3 = E$ , найдем

$$\begin{aligned} BA &= (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = A^2B = B_2, \\ BA^2 &= (BA^2)^{-1} = A^{-2}B^{-1} = AB = B_1. \end{aligned}$$



Теперь таблица умножения этих преобразований может быть записана в виде

$I \backslash II$	$E$	$A$	$A^2$	$B$	$B_1$	$B_2$
$E$	$E$	$A$	$A^2$	$B$	$B_1$	$B_2$
$A$	$A$	$A^2$	$E$	$B_1$	$B_2$	$B$
$A^2$	$A^2$	$E$	$A$	$B_2$	$B$	$B_1$
$B$	$B$	$B_2$	$B_1$	$E$	$A^2$	$A$
$B_1$	$B_1$	$B$	$B_2$	$A$	$E$	$A^2$
$B_2$	$B_2$	$B_1$	$B$	$A^2$	$A$	$E$

В этой таблице слева стоит первый сомножитель произведения, а сверху — второй. Так как таблица не является симметричной, то рассматриваемая группа не будет коммутативной.

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Указать, какие из приводимых ниже совокупностей преобразований плоскости  $L_2$  образуют группу и какие ее не образуют:

- а) совокупность всех вращений вокруг точки  $O$ ;
- б) совокупность симметрий относительно всевозможных прямых плоскости, проходящих через точку  $O$ ;
- в) совокупность преобразований гомотетии с центром в точке  $O$  и всевозможными коэффициентами;
- г) совокупность всех преобразований гомотетии с центром в точке  $O$  и совокупность всех вращений вокруг этой точки;
- д) симметрия относительно прямой, проходящей через точку  $O$ , и тождественное преобразование;
- е) совокупность поворотов вокруг данной точки  $O$  на углы  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  и  $360^\circ$ ;
- ж) совокупность поворотов вокруг данной точки на углы  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$  и симметрий вокруг двух данных взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке  $O$ .

2. Из каких преобразований состоят совокупности всех ортогональных преобразований плоскости  $L_2$ , переводящие в себя

- а) ромб?
- б) квадрат?
- в) равносторонний треугольник?
- г) правильный шестиугольник?

Составляют ли эти совокупности преобразований группу?

3. Определить, какие из следующих числовых множеств образуют группу относительно указанной операции и какие не образуют:

- а) множество целых чисел относительно сложения;
- б) множество рациональных чисел относительно сложения;
- в) множество комплексных чисел относительно сложения;
- г) множество неотрицательных целых чисел относительно сложения;
- д) множество четных чисел относительно сложения;
- е) множество чисел вида  $2^k$ , где  $k$  — целое число, относительно умножения;
- ж) множество отличных от нуля рациональных чисел относительно умножения;
- з) множество отличных от нуля действительных чисел относительно умножения;
- и) множество отличных от нуля комплексных чисел относительно умножения;
- к) множество целых чисел, кратных данному натуральному числу  $n$ , относительно сложения.

4. Выяснить, образуют ли группу

- а) матрицы третьего порядка с действительными элементами относительно сложения;
- б) невырожденные матрицы третьего порядка с действительными элементами относительно умножения;
- в) матрицы третьего порядка с целыми элементами относительно умножения;
- г) матрицы третьего порядка с целыми элементами и определителем, равным  $\pm 1$ , относительно умножения;
- д) многочлены степени  $\leq n$  от неизвестного  $x$  (включая нуль) относительно сложения;
- е) многочлены степени  $n$  относительно сложения;
- ж) многочлены любых степеней (включая нуль) относительно сложения.

5. Какие из групп задач 1—4 являются подгруппами других из этих групп?

6. Доказать, что матрица  $A$  ортогональна тогда и только тогда, когда ее определитель равен  $\pm 1$ , а каждый элемент равен своему алгебраическому дополнению, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от того,  $|A| = 1$  или  $|A| = -1$ .

7. При каких условиях диагональная матрица будет ортогональной?

8. Найти матрицы преобразований, рассмотренных в примерах а), б), в) п. 4 этого параграфа, выбрав в каждом случае наиболее удобный базис. Непосредственной проверкой убедиться, что для каждого из этих примеров соответствующая совокупность матриц образует группу.

## ГЛАВА IV

### ПРИВЕДЕНИЕ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

#### § 1. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

1. Пусть дано линейное преобразование

$$y = Ax.$$

Вектор  $x \neq 0$  называется *собственным вектором* этого линейного преобразования, если

$$Ax = \lambda x, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — некоторое действительное число; число  $\lambda$  называется *собственным значением* вектора  $x$ .

Это определение означает, что собственный вектор  $x$  при преобразовании  $A$  переходит в коллинеарный вектор, причем собственное значение равно отношению этих коллинеарных векторов (коэффициенту «растяжения» собственного вектора в результате преобразования  $A$ ).

Очевидно, что если  $x$  — собственный вектор преобразования  $A$ , то и любой коллинеарный ему вектор  $x' = \alpha x$  ( $\alpha$  — любое действительное число, отличное от нуля) также будет собственным вектором преобразования  $A$  с тем же собственным значением, что и  $x$ . Действительно, в силу линейности преобразования  $A$  имеем

$$Ax' = A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda x'.$$

Отметим, что равенство (1) может быть записано также в виде

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Все сказанное в равной степени относится к пространствам  $L_2$ ,  $L_3$  и вообще к любому линейному пространству  $L$ .

Для иллюстрации введенных понятий собственного вектора и собственного значения рассмотрим линейные преобразования, фигурировавшие в примерах §§ 1, 2 гл. III.

а) Для гомотетии пространства  $L_3$  (или  $L_2$ ) любой вектор  $x$  будет собственным с собственным значением  $\lambda$ . Аналогичное утверждение, конечно, имеет место и для тождественного преобразования  $E$ , являющегося частным случаем гомотетии ( $\lambda = 1$ ), и для отражения от точки ( $\lambda = -1$ , см. упр. 2а) на стр. 87).

б) Для геометрического растяжения плоскости  $L_2$  в направлении вектора  $e_2$ :

$$y = Ax = x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2,$$

собственными векторами будут векторы, лежащие на осях  $Ox_1$  и  $Ox_2$  (напомним, что рассматриваются векторы с началом в  $O$ ). Очевидно, что для собственных векторов, лежащих на оси  $Ox_1$ , собственное значение равно 1, а для собственных векторов, лежащих на оси  $Ox_2$ , собственное значение равно  $\lambda$ . В частности, те же векторы будут собственными при проектировании плоскости  $L_2$  на ось  $Ox_1$  ( $\lambda = 0$ ), причем векторы, лежащие на оси  $Ox_2$ , будут переходить при проектировании в нулевой вектор  $0$  (который коллинеарен любому вектору!).

в) Поворот плоскости  $L_2$  на угол  $\alpha$ , отличный от  $0^\circ$  и  $180^\circ$ , очевидно, действительных собственных векторов не имеет. Если же  $\alpha = 0^\circ$  или  $\alpha = 180^\circ$ , то получим тождественное преобразование или отражение от точки, для которых любой вектор — собственный. В отличие от этого поворот пространства  $L_3$  имеет единственное действительное собственное направление, совпадающее с направлением оси вращения (см. упр. 2в) к этому параграфу).

г) Для сдвига

$$y = Ax = (x_1 + kx_2) e_1 + x_2 e_2$$

плоскости  $L_2$  в направлении вектора  $e_1$  собственными векторами, отвечающими собственному значению 1, очевидно, будут векторы, лежащие на оси  $Ox_1$ .

д) Собственными векторами преобразования

$$Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2 + \lambda_3 x_3 e_3,$$

представляющего собой в пространстве  $L_3$  совокупность трех растяжений вдоль взаимно перпендикулярных осей  $e_1, e_2, e_3$ , служат векторы, лежащие на этих осях, поскольку

$$Ae_i = \lambda_i e_i \quad (\text{по } i \text{ нет суммирования}).$$

Им отвечают собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Аналогично на плоскости  $L_2$  собственными векторами преобразования

$$Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$$

служат векторы, лежащие на осях  $e_1$  и  $e_2$ . Соответствующими собственными значениями этих векторов являются числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

2. Перейдем теперь к вопросу об отыскании собственных векторов и собственных значений данного линейного преобразования  $A$  в пространстве  $L_3$ . Мы знаем (гл. III, стр. 90), что если задан какой-нибудь ортонормированный базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , то с преобразованием  $A$  связывается матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— матрица преобразования  $A$  в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Если вектор  $x$ , координаты которого в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  равны  $x_1, x_2, x_3$ , есть собственный вектор преобразования  $A$  с собственным значением  $\lambda$ , то, записав равенство (1) в координатной форме, получим

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda x_3, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

или, в сокращенной записи,

$$a_{ij}x_j = \lambda x_i.$$

Перепишем равенства (2) в виде

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или, в сокращенных обозначениях, в виде

$$(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0.$$

Система (3) представляет собой систему трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными  $x_1, x_2, x_3$ . Поскольку по предположению она имеет ненулевое решение, которое составляют координаты ненулевого собственного вектора  $x$ , то определитель этой системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

или, кратко,

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где  $E$  — единичная матрица.

Тем самым мы доказали, что всякое собственное значение линейного преобразования  $A$  удовлетворяет уравнению (4).

Обратно, пусть  $\lambda_0$  — действительный корень уравнения (4). Тогда, если подставить  $\lambda_0$  в систему (3) вместо  $\lambda$ , то полученная система будет иметь ненулевое решение  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ , поскольку ее определитель равен нулю. Для вектора  $x_0$  с координатами  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  будут выполняться равенства (2), и, следовательно, для этого вектора  $x_0$  и числа  $\lambda_0$  имеет место соотношение

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0.$$

Поэтому  $x_0$  будет собственным вектором преобразования  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda_0$ .

Итак, для нахождения собственных векторов преобразования  $A$  надо решить уравнение (4); каждый действительный корень этого уравнения является собственным значением преобразования  $A$ , а координаты соответствующих этому значению собственных векторов определяются из системы (3).

Уравнение (4) называется *характеристическим* (или *вековым*) уравнением преобразования  $A$ .

До сих пор мы рассматривали только действительные скалярные величины и векторы только с действительными координатами. Но в математике рассматривают также векторные пространства над множеством комплексных чисел, допуская в качестве скаляров и в качестве координат вектора

комплексные числа. Если при изучении линейных преобразований встать на эту точку зрения, то можно допускать существование комплексных собственных значений и собственных векторов с комплексными координатами.

Предположим теперь, что матрица линейного преобразования имеет действительные компоненты. Тогда характеристическое уравнение (4) этого линейного преобразования является уравнением третьей степени с действительными коэффициентами. Из алгебры известно, что такое уравнение имеет либо три действительных корня, либо один действительный и два комплексно сопряженных корня. Легко видеть, что комплексно сопряженным собственным значениям будут соответствовать комплексно сопряженные собственные векторы линейного преобразования  $A$ .

3. Развернем определитель, стоящий в левой части характеристического уравнения. Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

где

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Многочлен, стоящий в левой части характеристического уравнения, называется *характеристическим многочленом* матрицы  $A$ . Как мы видим, для пространства  $L_3$  этот многочлен имеет третью степень.

Поскольку собственные значения преобразования  $A$  определены независимо от выбора базиса, то действительные корни характеристического уравнения также не зависят от выбора базиса.

Покажем, что и сам характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. В самом деле, характеристический многочлен есть определитель матрицы  $A - \lambda E$ . При преобразовании прямоугольного базиса (гл. III, стр. 116) матрица  $A$

переходит в матрицу  $A'$ , определяемую по формуле

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1},$$

где  $\Gamma$  — ортогональная матрица перехода от старого базиса к новому. Заметим также, что  $\Gamma(\lambda E)\Gamma^{-1} = \lambda E$ . Поэтому

$$A' - \lambda E = \Gamma A \Gamma^{-1} - \Gamma(\lambda E)\Gamma^{-1} = \Gamma(A - \lambda E)\Gamma^{-1}.$$

Отсюда на основании теоремы об определителе произведения матрицы (§ 5 гл. III, стр. 114) вытекает, что

$$|A' - \lambda E| = |\Gamma| |A - \lambda E| |\Gamma^{-1}|.$$

Но  $|\Gamma^{-1}| |\Gamma| = 1$ , как произведение определителей обратных матриц. Поэтому

$$|A - \lambda E| = |A' - \lambda E|.$$

Утверждение доказано. Поэтому можно теперь называть характеристический многочлен матрицы  $A$  характеристическим многочленом преобразования  $A$ .

Из доказанной инвариантности характеристического многочлена следует инвариантность его коэффициентов  $I_1, I_2, I_3$ :

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} &= a_{1'1'} + a_{2'2'} + a_{3'3'}, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \\ &= \begin{vmatrix} a_{1'1'} & a_{1'2'} \\ a_{2'1'} & a_{2'2'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1'1'} & a_{1'3'} \\ a_{3'1'} & a_{3'3'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2'2'} & a_{2'3'} \\ a_{3'2'} & a_{3'3'} \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{1'1'} & a_{1'2'} & a_{1'3'} \\ a_{2'1'} & a_{2'2'} & a_{2'3'} \\ a_{3'1'} & a_{3'2'} & a_{3'3'} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица линейного преобразования в пространстве  $L_3$  имеет три инварианта. Заметим, что инвариантность величин  $I_1$  — следа матрицы  $A$  и  $I_3$  — определителя матрицы была доказана нами ранее (§ 4 гл. II, стр. 68 и § 5 гл. III, стр. 116).

4. Пусть теперь

$$u = Ax$$



— линейное преобразование на плоскости  $L_2$ , а

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— его матрица в некотором ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$ . Аналогично предыдущему можно показать, что собственные значения преобразования  $A$  определяются из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а собственные векторы — из системы

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0, \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

куда вместо  $\lambda$  надо подставить решения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  характеристического уравнения.

Многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

стоящий в левой части характеристического уравнения, называется *характеристическим многочленом* преобразования  $A$ . Его коэффициенты

$$I_1 = a_{11} + a_{22},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не зависят от выбора базиса.

Рассмотрим еще раз примеры в) и г) этого параграфа и подтвердим аналитически указанные там результаты о собственных векторах.

в) Повороту плоскости  $L_2$  на угол  $\alpha$  соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

(гл. III, стр. 93). Составим характеристическое уравнение для этого преобразования:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha + 1 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения, равный  $\cos^2 \alpha - 1$ , для значений  $\alpha$ , заключенных от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , отрицателен. Поэтому поворот на угол  $\alpha$ , отличный от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , не имеет действительных собственных значений, а следовательно, и действительных собственных векторов. Но легко видеть, что рассматриваемое преобразование имеет комплексно сопряженные собственные значения:

$$\lambda = \cos \alpha \pm i \sin \alpha.$$

Соответствующие им собственные векторы находим из систем

$$\left. \begin{aligned} \mp i \sin \alpha x_1 - \sin \alpha x_2 &= 0, \\ \sin \alpha x_1 \mp i \sin \alpha x_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Так как  $\alpha \neq 0, 180^\circ$ , то получим

$$x_2 = \mp i x_1;$$

полагая здесь  $x_1 = 1$ , найдем собственные векторы  $a_1 = \{1, -i\}$ ,  $a_2 = \{1, +i\}$ . Они имеют комплексно сопряженные координаты. Заметим, что  $a_1^2 = a_2^2 = 0$ , т. е.  $a_1, a_2$  имеют нулевую длину. Векторы, имеющие нулевую длину, называются *изотропными* векторами. Таким образом, мы доказали, что собственными векторами поворота являются изотропные векторы.

2) Сдвигу плоскости  $L_2$  в направлении вектора  $e_2$  отвечает матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(пример ж) на стр. 93). Характеристическое уравнение для сдвига имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & k \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(1 - \lambda)^2 = 0,$$

откуда следует, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Соответствующий собственный вектор определяем из системы

$$\left. \begin{aligned} (1 - 1)x_1 + kx_2 &= 0, \\ 0x_1 + (1 - 1)x_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

которая дает  $x_2 = 0$ , т. е. собственными векторами, соответствующими единственному собственному значению 1, будут векторы, расположенные на оси  $Ox_1$ .

В заключение рассмотрим два числовых примера.

е) Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, имеющего в ортогональном базисе  $\{e_1, e_2\}$  вид

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 4x_2, \\ y_2 &= 5x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0,$$

откуда находим собственные значения

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 7.$$

Для значения  $\lambda_1 = -2$  собственный вектор находим из системы

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{4}{5}.$$

Аналогично для  $\lambda_2 = 7$  имеем

$$\left. \begin{aligned} -4x_1 + 4x_2 &= 0, \\ 5x_1 - 5x_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\frac{x_1}{x_2} = 1.$$

Таким образом, собственными векторами будут векторы

$$\begin{aligned} a_1 &= \{4, -5\}, \\ a_2 &= \{1, 1\} \end{aligned}$$

и все коллинеарные им векторы.

ж) Найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования, которое в ортогональном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  имеет вид

$$y_1 = 4x_1 - 5x_2 + 7x_3,$$

$$y_2 = x_1 - 4x_2 + 9x_3,$$

$$y_3 = -4x_1 + 5x_3.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0.$$

Корни этого уравнения:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2 + 3i$ ,  $\lambda_3 = 2 - 3i$ . Собственный вектор, соответствующий единственному действительному значению  $\lambda_1 = 1$ , находим из системы

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 + 4x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Последнее уравнение этой системы дает  $x_1 = x_3$ , а из первых двух получаем

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, данное линейное преобразование имеет только один действительный собственный вектор  $a = \{1, 2, 1\}$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что любой вектор пространства  $L_1$  является собственным при любом линейном преобразовании  $L_1$ .

2. Найти собственные векторы и собственные значения следующих линейных преобразований пространства  $L_3$ :

а)  $u = (ax) b$ ;

б)  $u = a \times x$ ;

в)  $u = (x\omega) \omega + [x - (x\omega) \omega] \cos \alpha + \omega \times x \sin \alpha$ ;

г)  $u = (ax) a + (bx) b$ , где  $a^2 = b^2$ ;

д)  $u = (ax) a + (bx) b + (cx) c$ , где  $a^2 = b^2 = c^2$  и  $ab = bc = ac$ .

3. Найти собственные векторы и собственные значения линейных преобразований, переводящих

а) векторы  $e_1, e_2, e_3$  соответственно в векторы  $e_2, e_3, e_1$ ;

б) векторы  $e_1, e_2, e_3$  соответственно в векторы  $e_2 + e_3, e_3 + e_1, e_1 + e_2$ .

4. Найти собственные векторы и собственные значения линейных преобразований плоскости  $L_2$  и пространства  $L_3$ , которым в некотором базисе соответствуют матрицы

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{д)} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}; & \text{е)} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

5. Доказать, что

а) характеристические уравнения линейного преобразования  $A$  и сопряженного к нему преобразования  $A^*$  одинаковы;

б) если  $x$  — собственный вектор преобразования  $A$  с собственным значением  $\lambda_1$  и преобразования  $A^*$  с собственным значением  $\lambda_2$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2$ ;

6. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — собственные значения линейного преобразования  $A$ . Доказать, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = I_1, \quad \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = I_2, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = I_3.$$

7. Используя результат задачи 6, доказать, что все собственные значения преобразования  $A$  отличны от нуля тогда и только тогда, когда преобразование  $A$  не вырождено.

8. Доказать, что собственные значения обратного линейного преобразования  $A^{-1}$  равны обратным величинам собственных значений преобразования  $A$ .

9. Доказать, что характеристические многочлены преобразований  $AB$  и  $BA$  совпадают.

10. Доказать, что собственное нетождественное вращение пространства  $E_3$ , задаваемое в некотором прямоугольном базисе ортогональной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad |A| = 1,$$

может быть осуществлено поворотом на некоторый угол  $\alpha$  вокруг неподвижной прямой.

Найти угол  $\alpha$  и направляющий вектор такой прямой.

11. Найти угол  $\alpha$  и направляющий вектор неподвижной прямой (о которых идет речь в задаче 10), если

$$A = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{15} & \frac{14}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

12. Найти ортогональное преобразование, которое осуществляет поворот на угол  $-\alpha$  вокруг той же оси, относительно которой собственное вращение с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

определяет поворот на угол  $\alpha$ .

13. Доказать, что если вектор  $x$  — собственный вектор линейного преобразования  $A$  с собственным значением  $\lambda_0$ , то он будет собственным вектором линейного преобразования  $A^2$  с собственным значением  $\lambda_0^2$ .

14. Показать, что если линейное преобразование  $A^2$  имеет собственный вектор с неотрицательным собственным значением  $\mu^2$ , то линейное преобразование  $A$  имеет собственный вектор с собственным значением  $\mu$ .

15. Доказать, что если характеристическое уравнение линейного преобразования  $A$  пространства  $L_1$  имеет два комплексно сопряженных корня, то им соответствует плоскость  $L_2$ , переходящая в себя при преобразовании  $A$  (инвариантная плоскость). Найти эту плоскость для преобразования, рассмотренного в примере жс).

16. Показать, что линейное преобразование в пространстве  $C[a, b]$  непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций, состоящее в умножении функций на независимый аргумент, не имеет собственных значений.

17. Доказать, что линейное преобразование пространства  $C[a, b]$ , заключающееся в дифференцировании функций, имеет бесчисленное множество собственных значений.

18. Найти собственные векторы и собственные значения операции дифференцирования многочленов в пространстве многочленов степени, не превосходящей  $n$ .

## § 2. Приведение к простейшему виду матрицы линейного преобразования в случае различных собственных значений

Рассмотрим случай, когда все три корня характеристического уравнения действительны и различны, и покажем, как с помощью преобразования базиса можно упростить матрицу такого линейного преобразования.

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — три различных собственных значения преобразования  $A$  и  $a_1, a_2, a_3$  — соответствующие им собственные

векторы, т. е.

$$Aa_1 = \lambda_1 a_1, \quad Aa_2 = \lambda_2 a_2, \quad Aa_3 = \lambda_3 a_3.$$

Докажем, что эти три вектора линейно независимы. Рассмотрим сначала какие-нибудь два из векторов  $a_1, a_2, a_3$ , например,  $a_1$  и  $a_2$ , и допустим, что они связаны соотношением

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0, \quad (1)$$

причем  $a_1$  и  $a_2$ , как собственные векторы, отличны от нуля. Применим к обеим частям этого соотношения преобразование  $A$ . Тогда получим

$$\alpha_1 Aa_1 + \alpha_2 Aa_2 = 0,$$

или

$$\alpha_1 \lambda_1 a_1 + \alpha_2 \lambda_2 a_2 = 0. \quad (2)$$

Умножив (1) на  $(-\lambda_1)$  и на  $(-\lambda_2)$  и сложив каждое из полученных равенств с равенством (2), будем иметь

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) a_2 = 0, \quad \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) a_1 = 0,$$

откуда, поскольку  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ , следует

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

что означает линейную независимость векторов  $a_1$  и  $a_2$ .

Рассмотрим теперь все три собственных вектора  $a_1, a_2, a_3$ .

В силу только что доказанного каждая пара векторов  $a_1, a_2, a_3$  линейно независима. Докажем, что все три вектора также линейно независимы. Допустим, что эти три вектора линейно независимы, т. е.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0, \quad (3)$$

где, например,  $\alpha_1 \neq 0$ . Применив к равенству (3) преобразование  $A$ , будем иметь

$$\alpha_1 Aa_1 + \alpha_2 Aa_2 + \alpha_3 Aa_3 = 0,$$

или

$$\alpha_1 \lambda_1 a_1 + \alpha_2 \lambda_2 a_2 + \alpha_3 \lambda_3 a_3 = 0. \quad (4)$$

Умножив равенство (3) на  $(-\lambda_3)$  и сложив полученное равенство с равенством (4), получим

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_3) a_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_3) a_2 = 0,$$

откуда, поскольку  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_3$ , следует линейная зависимость векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ . Но такой зависимости, в силу первой части нашего доказательства, быть не может.

Линейно независимые векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  можно принять за базис. Заметим, что векторы этого базиса, вообще говоря, не будут ортогональными. Произвольный вектор  $\mathbf{x}$  относительно базиса  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  имеет координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , т. е.

$$\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \xi_2 \mathbf{a}_2 + \xi_3 \mathbf{a}_3,$$

а его образ  $\mathbf{y}$  при преобразовании  $\mathbf{A}$  — координаты  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ :

$$\mathbf{y} = \eta_1 \mathbf{a}_1 + \eta_2 \mathbf{a}_2 + \eta_3 \mathbf{a}_3.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}(\xi_1 \mathbf{a}_1 + \xi_2 \mathbf{a}_2 + \xi_3 \mathbf{a}_3) = \xi_1 \mathbf{A}\mathbf{a}_1 + \xi_2 \mathbf{A}\mathbf{a}_2 + \xi_3 \mathbf{A}\mathbf{a}_3 = \\ &= \xi_1 \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \xi_2 \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \xi_3 \lambda_3 \mathbf{a}_3, \end{aligned}$$

получаем следующее координатное представление преобразования  $\mathbf{A}$  в базисе  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ :

$$\eta_1 = \lambda_1 \xi_1,$$

$$\eta_2 = \lambda_2 \xi_2,$$

$$\eta_3 = \lambda_3 \xi_3.$$

Следовательно, в базисе, состоящем из собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, матрица преобразования  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

т. е. является диагональной матрицей.

Обратное утверждение: если в некотором базисе  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  линейное преобразование имеет диагональную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — различные действительные числа, то все векторы базиса  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  — собственные. Это утверждение доказано нами в примере д) на стр. 135.



Из доказанного видно, что собственные векторы играют важную роль в теории линейных преобразований: если существует базис из собственных векторов, то в этом базисе преобразование имеет наиболее простое координатное представление и может быть определено с помощью одних лишь собственных значений базисных векторов.

Очевидно, что в случае плоскости  $L_2$  можно доказать аналогичное утверждение: *если линейное преобразование  $A$  на плоскости  $L_2$  имеет два различных действительных значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то в базисе, состоящем из двух собственных векторов (они будут неколлинеарными, но не обязательно ортогональными), матрица  $A$  этого преобразования будет диагональной:*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

В заключение рассмотрим два примера.

а) Линейное преобразование  $A$  плоскости  $L_2$  в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Путем перехода к новому базису привести эту матрицу к диагональному виду (если это возможно).

Решение. Мы уже видели (§ 1, пример  $e$ ), стр. 142), что рассматриваемое линейное преобразование имеет собственные значения  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 7$  и собственные векторы  $a_1 = \{4, -5\}$ ,  $a_2 = \{1, 1\}$ . Если векторы  $a_1$  и  $a_2$  принять за базис, то в этом базисе матрица преобразования  $A$  будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

б) Линейному преобразованию  $A$  пространства  $L_3$  в некотором базисе соответствует матрица

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Путем перехода к новому базису привести эту матрицу к диагональному виду (если это возможно).

Решение. Составляем характеристическое уравнение преобразования  $A$ :

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$  действительны и различны. Определим соответствующие им собственные векторы.

1)  $\lambda_1 = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из последнего уравнения находим  $x_2 = x_1 + x_3$ , тогда первые два уравнения дают  $x_1 = x_3$ . Поэтому  $a_1 = \{1, 2, 1\}$ .

2)  $\lambda_2 = 2$ .

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из первого и третьего уравнений следует, что  $x_1 = x_2$ . Тогда из системы следует, что  $x_3 = 0$ . Поэтому  $a_2 = \{1, 1, 0\}$ .

3)  $\lambda_3 = 3$ .

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Последнее уравнение дает  $x_3 = -2x_1 + 2x_2$ , и из первых двух получаем  $x_2 = 2x_1$ . Поэтому  $a_3 = \{1, 2, 2\}$ .

Перейдя к базису  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , мы приведем матрицу преобразования  $A$  к диагональному виду:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь ясно, что линейное преобразование  $A$  переводит вектор  $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$  в вектор  $u = \xi_1 a_1 + 2\xi_2 a_2 + 3\xi_3 a_3$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать сформулированное в тексте утверждение о возможности приведения к диагональному виду матрицы линейного преобразования плоскости  $L_2$ , имеющего различные действительные значения.

2. Доказать, что матрицы линейных преобразований, разобранных в примерах а) б), в) на стр. 135 и в задачах 2г), 4а) — в), е) (стр. 143—144), можно привести путем перехода к новому базису к диагональному виду. Найти этот базис и указать, какой вид будут иметь в нем матрицы этих преобразований.

3. Матрица линейного преобразования  $A$  в некотором базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В каком случае это преобразование будет иметь три различных действительных собственных значения? Найти в этом случае его собственные векторы.

4. Доказать, что если  $x$  и  $y$  — собственные векторы линейного преобразования  $A$  с различными собственными значениями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то вектор  $\alpha x + \beta y$  ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ) не может быть собственным вектором преобразования  $A$ .

5. Используя результат задачи 4, доказать, что если каждый вектор пространства  $L_3$  является собственным вектором линейного преобразования  $A$ , то  $A = \lambda E$  (т. е.  $A$  является гомотетией пространства  $L_3$ ).

6. Доказать, что матрица собственного ортогонального преобразования евклидовой плоскости  $E_2$  может быть приведена в некотором ортонормированном базисе к виду

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

а несобственного — к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Доказать, что в евклидовом пространстве  $E_3$  существует ортонормированный базис, в котором матрица произвольного ортогонального преобразования имеет один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

### § 3. Многочлены от матриц и теорема Гамильтона—Кэли

1. В гл. III было показано, как складываются, умножаются на число и друг на друга линейные преобразования плоскости  $L_2$  и пространства  $L_3$  и соответствующие им квадратные матрицы второго и третьего порядка. В частности, там рассматривалась операция возведения в целую степень линейного преобразования  $A$  и соответствующей ему матрицы  $A$ .

Пусть теперь

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$$

— некоторый многочлен переменной величины  $\lambda$ . Выражение

$$P(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m E,$$

где  $E$  — тождественное и  $A$  — произвольное линейное преобразование, называется *многочленом от преобразования  $A$* . Многочлен  $P(A)$  будет некоторым новым линейным преобразованием, построенным при помощи преобразования  $A$ . Если  $A$  — матрица линейного преобразования  $A$  в некотором базисе, то матрицей преобразования  $P(A)$  будет многочлен

$$P(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m E,$$

где  $E$  — единичная матрица. Действительно, преобразование  $P(A)$  получается из  $A$  при помощи операций умножения на число и сложения. Но этим операциям над линейными преобразованиями соответствуют такие же операции над матрицами.

Все правила действий, которые имеют место для многочленов от одной переменной величины, остаются справедливыми и для многочленов от линейных преобразований. Например, остаются справедливыми формулы

$$(A + E)^2 = A^2 + 2A + E,$$

$$(A + E)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + E,$$

$$A^3 - E = (A + E)(A - E)$$

и т. д. Аналогичные формулы будут справедливы и для матриц. Линейные преобразования  $P(A)$  и  $Q(A)$ , представляющие собой многочлены от одного и того же линейного преобразования  $A$ , будут всегда перестановочны:

$$P(A)Q(A) = Q(A)P(A).$$

2. Линейное преобразование  $A$  называется *корнем многочлена  $P(\lambda)$* , если при подстановке его в этот многочлен получается нулевое преобразование, т. е. если  $P(A) = N$ .

Пусть теперь  $P(\lambda)$  — характеристический многочлен линейного преобразования  $A$ , т. е.

$$P(\lambda) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3,$$

где  $I_1, I_2, I_3$  — инварианты этого линейного преобразования. Докажем следующую интересную теорему, которая носит название теоремы Гамильтона — Кэли.

**Теорема.** *Линейное преобразование  $A$  является корнем своего характеристического многочлена, т. е.*

$$P(A) = N.$$

Мы докажем эту теорему только для случая, когда характеристический многочлен  $P(\lambda)$  линейного преобразования  $A$  пространства  $L_3$  имеет три различных действительных корня. Но теорема остается справедливой при любом строении характеристического многочлена  $P(\lambda)$ .

Итак, пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — три различных действительных корня многочлена  $P(\lambda)$ . Тогда этот многочлен может быть представлен в виде

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

В таком случае

$$P(A) = (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E),$$

причем произведение, стоящее в правой части, не зависит от порядка сомножителей.

Чтобы доказать, что  $P(A) = N$ , надо доказать, что линейное преобразование  $P(A)$  любой вектор  $x$  переводит в нулевой вектор, т. е.  $P(A)x = 0$ .

Пусть  $a_1, a_2, a_3$  — собственные векторы линейного преобразования  $A$ , так что

$$Aa_1 = \lambda_1 a_1, \quad Aa_2 = \lambda_2 a_2, \quad Aa_3 = \lambda_3 a_3.$$

Поскольку  $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_3 \neq \lambda_1$ , то векторы  $a_1, a_2, a_3$  линейно независимы, и любой вектор  $x$  пространства  $L_3$  может быть представлен в виде их линейной комбинации:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3.$$

Тогда

$$P(A)x = \xi_1 P(A)a_1 + \xi_2 P(A)a_2 + \xi_3 P(A)a_3.$$

Но

$$\begin{aligned} P(A)a_1 &= (A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E)(A - \lambda_1 E)a_1 = \\ &= (A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E)(Aa_1 - \lambda_1 Ea_1) = \\ &= (A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E)(\lambda_1 a_1 - \lambda_1 a_1) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что

$$P(A)a_2 = 0, \quad P(A)a_3 = 0.$$

Поэтому

$$P(A)x \equiv 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

3. Из теоремы Гамильтона — Кэли следует, что матрицы  $E, A, A^2, A^3$  линейно зависимы, ибо

$$A^3 - I_1 A^2 + I_2 A - I_3 E = N. \quad (1)$$

Отсюда вытекает также, что любые четыре подряд идущие матрицы  $A^k, A^{k+1}, A^{k+2}, A^{k+3}$  последовательности матриц  $E, A, A^2, \dots$  также линейно зависимы. Для доказательства надо равенство (1) умножить на  $A^k$ .

Теорема Гамильтона — Кэли позволяет дать новый способ для вычисления обратной матрицы  $A^{-1}$  невырожденной матрицы  $A$ . В самом деле, умножив равенство (1) на  $A^{-1}$ , получим

$$A^2 - I_1 A + I_2 E - I_3 A^{-1} \equiv N.$$

Но  $I_3 = |A| \neq 0$ , поскольку мы рассматриваем невырожденную матрицу  $A$ . Поэтому

$$A^{-1} = \frac{1}{I_3} (A^2 - I_1 A + I_2 E).$$

#### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти  $\varphi(A)$ , если

$$\varphi(\lambda) = -2 - 5\lambda + 3\lambda^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Доказать непосредственной подстановкой, что матрица  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

3. Пусть  $f(A)$  — многочлен от линейного преобразования  $A$ . Доказать, что

а) собственные векторы линейного преобразования  $f(A)$  совпадают с собственными векторами преобразования  $A$ ;

б) если  $\lambda$  — собственное значение преобразования  $A$ , то  $f(\lambda)$  будет собственным значением преобразования  $f(A)$ .

4. Пусть  $a$  — произвольный вектор пространства  $L_3$ ,  $A$  — некоторое линейное преобразование этого пространства и

$$a_1 = Aa, \quad a_2 = A^2a, \quad a_3 = A^3a.$$

Доказать, что

а)  $a_3 = I_1 a_2 - I_2 a_1 + I_3 a$ ;

б) если векторы  $a, a_1, a_2$  линейно зависимы, но векторы  $a$  и  $a_1$  не коллинеарны, то плоскость, определяемая этими векторами, переходит в себя при преобразовании  $A$  (является инвариантной плоскостью).

Предполагая, что векторы  $a, a_1, a_2$  линейно независимы, принять их за базисные и найти матрицу линейного преобразования  $A$  в этом базисе.

5. Доказать, что равенство  $AB - BA = E$  не выполняется ни для каких матриц  $A$  и  $B$ .

6. Найти обратные матрицы для матриц, указанных в задачах 1а)—д) к § 6 гл. III, с помощью приведенного в тексте способа отыскания обратной матрицы.

#### § 4. Свойства собственных векторов и собственных значений симметричного линейного преобразования

Рассмотрим симметричное линейное преобразование  $A$ . Такое преобразование, как было показано (стр. 103), удовлетворяет соотношению

$$xAy = yAx,$$

где  $x$  и  $y$  — любые векторы пространства. Было также доказано, что в любом ортонормированном базисе симметричное линейное преобразование, и только такое преобразование, имеет симметричную матрицу. Заметим, что аналогично дается определение симметричного линейного преобразования на плоскости  $L_2$  и в пространстве  $L_n$  и доказывается, что только такие преобразования имеют в любом ортонормированном базисе симметричную матрицу.

Докажем теперь четыре теоремы о собственных векторах и собственных значениях симметричного линейного преобразования пространства  $L_3$ . Эти теоремы позволят нам полностью решить вопрос о наиболее простом виде матрицы такого преобразования и выяснить его геометрический смысл.

*Теорема 1. Собственные векторы симметричного линейного преобразования, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны между собой.*

Действительно, пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — два различных собственных значения симметричного линейного преобразования  $A$ , а  $a_1$  и  $a_2$  — соответствующие им собственные векторы. Тогда

$$Aa_1 = \lambda_1 a_1, \quad Aa_2 = \lambda_2 a_2.$$

Умножив первое из этих равенств скалярно на  $a_2$ , а второе — на  $a_1$ , получим

$$a_2 Aa_1 = \lambda_1 (a_2 a_1),$$

$$a_1 Aa_2 = \lambda_2 (a_1 a_2).$$

В силу симметричности преобразования  $A$  левые части этих равенств равны, поэтому равны и правые их части:

$$\lambda_1(a_1a_2) = \lambda_2(a_1a_2),$$

или

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1a_2) = 0,$$

откуда, поскольку  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , имеем

$$a_1a_2 = 0,$$

что означает перпендикулярность векторов  $a_1$  и  $a_2$ .

**Теорема 2.** Если  $a$  — собственный вектор симметричного преобразования  $A$  и вектор  $x$  перпендикулярен вектору  $a$ , то вектор  $Ax$  также перпендикулярен вектору  $a$ .

В самом деле, пусть вектор  $x$  перпендикулярен вектору  $a$ . Тогда  $ax = 0$ . Так как  $a$  — собственный вектор, то

$$Aa = \lambda a.$$

Поэтому

$$aAx = xAa = x\lambda a = \lambda(ax) = 0.$$

А это и означает, что вектор  $Ax$  перпендикулярен вектору  $a$ .

Заметим, что при доказательстве теорем 1 и 2 мы нигде не пользовались тем, что размерность пространства  $L_3$  равна трем. Тем самым эти теоремы доказаны для любого пространства  $L_n$ , в частности и для плоскости  $L_2$ .

Теорема 2 для пространства  $L_2$  означает, что если симметричное преобразование  $A$  имеет один собственный вектор, то любой перпендикулярный ему вектор тоже будет собственным. Для пространства  $L_3$  эта теорема означает следующее. Если  $a$  — собственный вектор симметричного преобразования пространства  $L_3$  и  $\pi$  — перпендикулярная вектору  $a$  плоскость, то векторы, лежащие в плоскости  $\pi$ , при преобразовании  $A$  остаются в этой плоскости, т. е. плоскость  $\pi$  является инвариантной плоскостью преобразования  $A$ .

Перейдем теперь к третьей теореме.

**Теорема 3.** Корни характеристического уравнения симметричного линейного преобразования всегда действительны.

Предположим противное: пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$  — комплексный корень характеристического уравнения  $P(\lambda) = 0$ . Так как это



уравнение имеет действительные коэффициенты, то число  $\lambda^* = \alpha - i\beta$ , сопряженное  $\lambda$ , также является корнем уравнения  $P(\lambda) = 0$ . Обозначим через  $x$  и  $x^*$  собственные векторы, отвечающие собственным значениям  $\lambda$  и  $\lambda^*$ , так что

$$Ax = \lambda x, \quad Ax^* = \lambda^* x^*.$$

Векторы  $x$  и  $x^*$ , как мы отмечали на стр. 138, будут комплексно сопряженными векторами:

$$x = x_k e_k, \quad x^* = x_k^* e_k,$$

где  $x_k$  и  $x_k^*$  — комплексно сопряженные числа.

Если  $\lambda \neq \lambda^*$ , то по теореме 1, которая сохраняет свою силу и для комплексных значений  $\lambda$ , векторы  $x$  и  $x^*$  будут ортогональны между собой и  $xx^* = 0$ . Но, с другой стороны,

$$xx^* = x_k x_k^* = \sum_{k=1}^3 |x_k|^2 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что теорема 3 также будет справедлива для любого  $n$  и, в частности, для  $n=2$ .

**Теорема 4.** *Симметричное линейное преобразование пространства  $L_3$  имеет три взаимно ортогональных собственных вектора.*

Пусть  $\lambda_1$  — собственное значение симметричного линейного преобразования  $A$  (действительное, как доказано выше) и  $a_1$  — соответствующий ему собственный вектор. Тогда плоскость  $\pi$ , ортогональная вектору  $a_1$ , будет инвариантной плоскостью по отношению к преобразованию  $A$ . В плоскости  $\pi$  преобразование  $A$  будет снова линейным симметричным преобразованием. Пусть  $\lambda_2$  — некоторое его собственное значение и  $a_2$  — соответствующий этому собственному значению собственный вектор. Вектор  $a_2$  ортогонален вектору  $a_1$ . Пусть теперь вектор  $a_3$  лежит в плоскости  $\pi$  и ортогонален вектору  $a_2$ . Из теоремы 2 следует, что этот вектор также будет собственным вектором преобразования  $A$ . Таким образом, мы нашли три взаимно ортогональных собственных вектора линейного преобразования  $A$ , что и требовалось.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать теорему 3 для плоскости  $L_2$  путем непосредственного вычисления корней характеристического уравнения преобразования  $A$ .

2. Доказать, что если линейное преобразование  $A$  в пространстве  $L_3$  имеет три взаимно перпендикулярных собственных вектора, то оно является симметричным линейным преобразованием.

3. Доказать, что два симметричных линейных преобразования пространства  $L_3$  перестановочны тогда и только тогда, когда они имеют три общих взаимно перпендикулярных собственных вектора.

4. Пусть  $A$  — кососимметричное линейное преобразование пространства  $L_3$ . Доказать, что

а) если  $a$  — собственный вектор преобразования  $A$ , то ортогональная ему плоскость будет инвариантной по отношению к этому преобразованию;

б) собственные значения преобразования  $A$  равны нулю или чисто мнимые;

в) собственные векторы  $a_1$  и  $a_2$  преобразования  $A$  (быть может, с комплексными координатами), отвечающие собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  таким, что  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ , взаимно ортогональны.

### § 5. Приведение к диагональному виду матрицы симметричного линейного преобразования

1. Пусть  $A$  — симметричное линейное преобразование пространства  $L_3$ . По теореме 4 существуют три взаимно ортогональных собственных вектора  $a_1, a_2, a_3$  линейного преобразования  $A$ . Пронормируем эти векторы, положив

$$\frac{a_i}{|a_i|} = e_{i'}.$$

Тогда векторы  $e_{i'}$  также будут собственными векторами линейного преобразования  $A$ , и, кроме того, они образуют ортонормированный базис. Так как

$$Ae_{1'} = \lambda_1 e_{1'}, \quad Ae_{2'} = \lambda_2 e_{2'}, \quad Ae_{3'} = \lambda_3 e_{3'},$$

то в этом базисе линейное преобразование  $A$  будет описываться диагональной матрицей

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку исходный базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$  и новый базис  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  являются ортонормированными, переход от одного базиса к другому задается ортогональной матрицей  $\Gamma = (\gamma_{ij})$ , так что

$$e_{i'} = \gamma_{ij} e_j.$$

Поэтому матрицы преобразования  $A$  в старом и новом базисах связаны зависимостью (гл. III, стр. 116)

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1}.$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

*Теорема. Матрица симметричного линейного преобразования может быть приведена к диагональному виду путем ортогонального преобразования базиса.*

Геометрически эта теорема означает, что симметричное линейное преобразование представляет собой совокупность трех последовательных растяжений или сжатий относительно трех взаимно перпендикулярных осей, определяемых векторами  $e_1', e_2', e_3'$ , так как именно такое линейное преобразование описывается диагональной матрицей (§ 2, гл. III, стр. 94, пример *и*).

2. Далее встает вопрос: единственным ли образом может быть выбран базис  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ , в котором матрица симметричного линейного преобразования  $A$  имеет диагональный вид? Здесь могут представиться три случая.

1) Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_2 \neq \lambda_3$ ,  $\lambda_3 \neq \lambda_1$ , то этим собственным значениям соответствует единственная система (с точностью до изменения направления и нумерации векторов), состоящая из трех взаимно ортогональных собственных векторов  $e_1', e_2', e_3'$ . В самом деле, вектор  $a$ , не коллинеарный одному из этих трех векторов, не может быть собственным вектором преобразования  $A$ . Пусть, например,

$$a = \alpha e_1' + \beta e_2',$$

в этом случае вектор

$$Aa = \alpha \lambda_1 e_1' + \beta \lambda_2 e_2',$$

не коллинеарен вектору  $a$ , если  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , и, значит, вектор  $a$  не является собственным.

2) Пусть  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  и  $e_1', e_2', e_3'$  — единичные собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Тогда любой вектор, лежащий в плоскости  $\pi$ , поро-

жденной векторами  $e_2'$ ,  $e_3'$ , будет собственным по отношению к преобразованию  $A$ . В самом деле, если

$$a = \alpha e_2' + \beta e_3',$$

то

$$Aa = \alpha Ae_2' + \beta Ae_3' = \alpha \lambda e_2' + \beta \lambda e_3' = \lambda (\alpha e_2' + \beta e_3') = \lambda a.$$

Поэтому любая взаимно ортогональная пара единичных векторов, лежащая в плоскости  $\pi$ , может быть принята за векторы  $e_2'$ ,  $e_3'$ .

Симметричное линейное преобразование  $A$  представляет собой в этом случае произведение двух преобразований: подобия с коэффициентом  $\lambda$  в плоскости, перпендикулярной оси  $Oe_1$ , и растяжения с коэффициентом  $\lambda_1$  вдоль этой оси.

Сделаем одно замечание, облегчающее нахождение собственных векторов в этом случае. Поскольку в плоскости  $\pi$  любой вектор — собственный, то при постановке в систему (2) из § 1 собственного значения  $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$  мы получим только одно существенное уравнение (два других будут ему пропорциональны):

$$(a_{11} - \lambda_2) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0. \quad (*)$$

Всякое ненулевое решение этого уравнения определит собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Уравнение (\*) означает, что все таким образом полученные собственные векторы перпендикулярны вектору  $a_1 = \{a_{11} - \lambda_2, a_{12}, a_{13}\}$ . Заметим, что  $a_1 \neq 0$ , поскольку уравнение (\*) не может иметь все коэффициенты равными нулю. Следовательно, вектор  $a_1$  — собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_1$ . Для построения искомого базиса остается пронормировать вектор  $a_1$ , взять в качестве координат вектора  $e_2'$  любое нормированное решение уравнения (\*) и найти  $e_3'$  как векторное произведение  $e_1' \times e_2'$ .

3) Пусть, наконец,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ . В этом случае любой вектор пространства будет собственным (см. пример а) § 1). Преобразование  $A$  есть подобие во всем пространстве с коэффициентом  $\lambda$ . В качестве базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  можно взять любую тройку единичных и попарно ортогональных векторов.

3. При изучении симметричных линейных преобразований в плоскости  $L_2$  могут представиться следующие два случая:

1)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . В базисе, состоящем из собственных векторов, матрица преобразования  $A$  будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

а само преобразование  $A$  есть произведение двух растяжений вдоль двух перпендикулярных собственных направлений.

2)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . В этом случае любой вектор плоскости  $L_2$  будет собственным. В любом ортонормированном базисе преобразованию  $A$ , являющемуся подобием, соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. В заключение рассмотрим несколько примеров.

а) В ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$  линейное преобразование  $A$  плоскости  $L_2$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти новый ортонормированный базис, в котором матрица преобразования  $A$  будет диагональной, и найти эту матрицу.

Решение. Матрица преобразования  $A$  симметрична, поэтому поставленная задача может быть решена. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Далее находим соответствующие этим собственным значениям собственные векторы:

1) При  $\lambda = 4$  система (3') § 1 принимает вид

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

В качестве ее решения можно взять  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ . Нормируя это решение, находим единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_1 = 4$ :

$$e_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}.$$

2) При  $\lambda = -1$  мы получим

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases}$$

откуда  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$  и  $e_2 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$ . При переходе к базису  $\{e_1, e_2\}$  координаты всех векторов преобразуются по

формулам (гл. I, стр. 37)

$$x_{i'} = \gamma_{i'i} x_i$$

где

$$\Gamma = (\gamma_{i'i}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

В базисе  $\{e_1', e_2'\}$  матрица линейного преобразования  $A$  будет иметь вид

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицу  $A'$  можно было написать и не производя этой выкладки, так как ее диагональными элементами являются собственные значения матрицы  $A$ . Преобразование  $A$  сводится к растяжению вдоль вектора  $e_1'$  с коэффициентом 4 и последующему растяжению вдоль вектора  $e_2'$  с коэффициентом  $-1$ .

б) В ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  дано линейное преобразование  $A$  пространства  $L_3$ , имеющее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти новый ортонормированный базис, в котором матрица преобразования  $A$  будет диагональной, и найти эту матрицу.

Решение. В силу симметричности матрицы  $A$  поставленная задача имеет решение. Находим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = -2$ . Так как они различны, то преобразование  $A$  принадлежит первому типу. Выпишем систему уравнений, из которой определяются координаты собственных

векторов для нашей задачи:

$$\left. \begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 + (5-\lambda)x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя в эту систему поочередно  $\lambda_1=3$ ,  $\lambda_2=6$ ,  $\lambda_3=-2$  и находя каждый раз ее нормированные решения, получим векторы  $e_i'$  нового ортонормированного базиса:

$$e_1' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$e_2' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\},$$

$$e_3' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Заметим, что вектор  $e_3'$  можно найти как векторное произведение  $e_1' \times e_2'$ . Матрица  $\Gamma$  в данном случае имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  преобразование  $A$  будет иметь матрицу

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Преобразование  $A$  геометрически представляет собой произведение трех растяжений вдоль осей  $e_1', e_2', e_3'$ ; коэффициенты этих растяжений равны соответственно 3, 6, -2.

а) В ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

задает линейное преобразование  $A$  пространства  $L_3$ . Найти новый ортонормированный базис, в котором преобразование  $A$  задавалось бы диагональной матрицей.

Решение. В силу симметричности матрицы  $A$  решение возможно. Найдем характеристическое уравнение преобразования  $A$ :

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ , и наша задача соответствует второму случаю; согласно сделанному при его рассмотрении замечанию запишем систему, соответствующую собственному значению  $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ . В этой системе будет только одно существенное уравнение:

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \quad (1)$$

Отсюда следует, что вектор  $a_1 = \{-1, 2, 3\}$  — собственный вектор с собственным значением  $\lambda_1 = -3$ . Соответствующий вектору  $a_1$  единичный вектор будет

$$e_1' = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}.$$

Возьмем теперь любое решение уравнения (1), например  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 2$ ; пронормировав его, получим вектор  $e_2'$ :

$$e_2' = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}.$$

Наконец, находим вектор  $e_3'$ , как векторное произведение:

$$e_3' = e_1' \times e_2' = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right\}.$$

Матрица  $\Gamma$  имеет в данном случае вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

В базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  преобразованию  $A$  соответствует матрица

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$



Следовательно, преобразование  $A$  можно осуществить, производя последовательно растяжение вдоль оси  $e_1$ , с коэффициентом  $-3$ , а затем — гомотетию с коэффициентом  $6$  в плоскости векторов  $e_2, e_3$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Симметричное линейное преобразование плоскости  $L_2$  или пространства  $L_3$  в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; & \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Найти новый ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования будет иметь диагональный вид, и указать его.

2. Возвести в тридцатую степень матрицы

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Симметричное преобразование  $A$  называется *неотрицательным*, если  $xAx \geq 0$  для любого вектора  $x$ . Доказать, что

а) все собственные значения такого и только такого преобразования неотрицательны;

б) найдется неотрицательное симметричное преобразование  $B$  такое, что  $B^2 = A$ ;

в) если для некоторого преобразования  $C$  имеет место  $AC = CA$ , то и  $BC = CB$  (здесь  $B^2 = A$ );

г) сумма двух неотрицательных симметричных преобразований есть преобразование того же вида;

д) произведение двух перестановочных неотрицательных симметричных преобразований есть преобразование того же вида;

е) многочлены с действительными неотрицательными коэффициентами от таких преобразований будут преобразованиями того же вида;

ж) коэффициенты характеристического многочлена такого и только такого преобразования имеют чередующиеся знаки.

4. Доказать, что симметричные преобразования, которые в некотором ортонормированном базисе имеют матрицы

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix},$$

будут неотрицательными, и найти в том же базисе матрицу преобразования  $B$  такого, что  $B^2 = A$ .

5. Доказать, что если  $A$  — симметричное ортогональное линейное преобразование, то его матрица путем ортогонального преобразования базиса может быть приведена к одному из следующих четырех типов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## § 6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

1. Как было показано в § 4 гл. III, между квадратичными формами и симметричными линейными преобразованиями существует взаимно однозначное соответствие. Выясним, как, используя это соответствие и возможность приведения матрицы симметричного линейного преобразования к диагональному виду, можно упростить квадратичную форму  $\varphi$ .

Рассмотрим квадратичную форму  $\varphi = xAx = a_{ik}x_ix_k$ . Приведем соответствующее ей симметричное линейное преобразование  $y = Ax$  к простейшему виду. Для этого перейдем к базису  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ , состоящему из трех попарно ортогональных единичных собственных векторов. В таком базисе, как мы знаем из § 4, матрица преобразования станет диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix};$$

здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — собственные значения, соответствующие векторам базиса  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ .

Что касается формы  $\varphi$ , то она в новом базисе примет вид

$$\varphi = xAx = x_i y_i = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2; \quad (1)$$

здесь  $x_i, y_i$  — координаты векторов  $x$  и  $y = Ax$  в базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ .

Таким образом, всякая квадратичная форма  $\varphi$  может быть приведена к сумме квадратов (или, как еще говорят,

к каноническому виду) с помощью перехода к ортонормированному базису, состоящему из единичных собственных векторов симметричного линейного преобразования  $A$ , соответствующего форме  $\varphi$ .

Направления  $e_1, e_2, e_3$  называются *главными направлениями* формы  $\varphi$ , соответствующими собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Из результатов § 4 получаем:

если  $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_3 \neq \lambda_1$ , то форма  $\varphi$  имеет точно три главных направления;

если  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ , то форма  $\varphi$  имеет одно главное направление, соответствующее  $\lambda_1$ , и бесчисленное множество главных направлений, ему перпендикулярных; наконец,

если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , то любое направление в пространстве — главное для формы  $\varphi$ .

Аналогичные результаты можно получить для формы  $\varphi$  от двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

2. Рассмотрим два примера.

а) Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\varphi = 4x_1x_2 + 3x_3^2.$$

Решение. Соответствующее этой форме симметричное линейное преобразование имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с матрицей линейного преобразования, рассмотренной в примере а) § 5 (стр. 160). Там мы получили  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$ . Поэтому, перейдя к базису  $\{e_1, e_2\}$ , найденному в указанном примере, мы приведем форму  $\varphi$  к сумме квадратов:

$$\varphi = 4x_1^2 - x_2^2.$$

б) Привести к каноническому виду форму

$$\varphi = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Решение. Матрица  $A$  линейного преобразования  $A$ , соответствующего этой форме, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

она совпадает с матрицей преобразования, рассмотренного нами в примере б) § 5 (стр. 161).

Поскольку мы имели  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = -2$ , то, перейдя к найденному в указанном примере базису  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ , получим канонический вид формы  $\varphi$ :

$$\varphi = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 - 2x_3'^2.$$

3. Квадратичная форма  $\varphi(x, x)$  называется *положительно (отрицательно) определенной*, если для любого вектора  $x \neq 0$  она принимает только положительные (отрицательные) значения.

Поскольку указанное свойство должно иметь место в любом базисе, то оно, в частности, должно иметь место и в том базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ , в котором эта форма имеет канонический вид (1). Но легко видеть, что для того, чтобы выражение (1) при любых  $x_1', x_2', x_3'$  было положительным (отрицательным), необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  были положительными (отрицательными).

Однако важно получить условие, которое даст нам возможность выяснить, будет ли положительно или отрицательно определенной квадратичная форма  $\varphi(x, x)$ , заданная в произвольном ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Пусть  $(a_{ij})$  — матрица этой квадратичной формы в рассматриваемом базисе. Назовем ее *главными минорами* величины

$$M_1 = a_{11}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Условие положительной определенности формы  $\varphi = (x, x)$ , которое называется *критерием Сильвестра*, может быть теперь сформулировано следующим образом.

**Теорема.** *Для того чтобы квадратичная форма  $\varphi(x, x)$  была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры в некотором базисе были положительными.*

Докажем сначала эту теорему для случая, когда квадратичная форма  $\varphi(x, x)$  задана на плоскости  $L_2$ . Форма  $\varphi$  записывается в виде

$$\varphi(x, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Введем новое вспомогательное переменное  $t = \frac{x_1}{x_2}$ . Тогда форма  $\varphi$  может быть переписана так:

$$\varphi(x, x) = x_2^2(a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22}).$$

Главный минор  $M_2$  квадратичной формы  $\varphi$  лишь знаком отличается от дискриминанта  $D$  квадратного трехчлена, стоящего в скобках. Если  $M_2 > 0$ , то  $D < 0$  и этот квадратный трехчлен не меняет знака при изменении параметра  $t$ . Если  $M_1 = a_{11} > 0$ , то этот трехчлен будет положительным при любых значениях параметра  $t$ . Следовательно, при  $M_1 > 0$  и  $M_2 > 0$  квадратичная форма  $\varphi(x, x)$  на плоскости  $L_2$  будет положительно определенной формой. Легко видеть, что и, наоборот, если  $\varphi(x, x) > 0$ , то  $M_1 > 0$  и  $M_2 > 0$ . В самом деле, положим  $x_1 = e_1$  и  $x_2 = -a_{12}e_1 + a_{11}e_2$ . Тогда

$$\varphi(x_1, x_1) = a_{11} = M_1,$$

$$\varphi(x_2, x_2) = a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = M_1M_2,$$

и так как  $\varphi(x_1, x_1) > 0$  и  $\varphi(x_2, x_2) > 0$ , то  $M_1 > 0$  и  $M_2 > 0$ .

Перейдем теперь к доказательству критерия Сильвестра в трехмерном случае. При этом форма  $\varphi(x, x)$  в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  может быть подробно записана так:

$$\begin{aligned} \varphi(x, x) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1. \end{aligned}$$

Если же перейдем к базису  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ , составленному из векторов, направленных по главным направлениям этой формы, то она примет канонический вид:

$$\varphi(x, x) = \lambda_1x_1'^2 + \lambda_2x_2'^2 + \lambda_3x_3'^2.$$

Так как главный минор  $M_3$  совпадает с инвариантом  $I_3$  этой формы, то  $M_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$  (см. упр. 6 на стр. 144).

Предположим теперь, что форма  $\varphi(x, x)$  положительно определена. Тогда  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_3 > 0$ , и потому  $M_3 > 0$ . Чтобы доказать положительность миноров  $M_3$  и  $M_1$ , достаточно рассмотреть форму  $\varphi(x, x)$  на плоскости  $x_3 = 0$  и воспользоваться доказанным выше критерием Сильвестра для случая  $L_2$ .

Обратно, пусть все главные миноры формы  $\varphi(x, x)$  положительны. Тогда

$$M_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0,$$

и оказываются возможными два случая: либо все три собственных значения  $\lambda_i$  положительны, либо одно из них положительно, а два других отрицательны. В первом случае квадратичная форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  будет положительно определенной, и обратное утверждение доказано.

Пусть теперь одно из чисел  $\lambda_i$  положительно, а два других отрицательны, например:  $\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ . Тогда на плоскости  $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_3'$  форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  отрицательно определена. Но, с другой стороны, на плоскости  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  равна

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

и, в силу положительности первых двух главных миноров, она положительно определена на этой плоскости. Отсюда следует, что на прямой, по которой пересекаются плоскости  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_3'$ , форма  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  будет одновременно положительно и отрицательно определенной. Полученное противоречие показывает, что все  $\lambda_i$  должны быть положительными. Тем самым обратное утверждение также доказано.

Замечая, что условие отрицательной определенности квадратичной формы  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_{ik}x_ix_k$  будет в то же время условием положительной определенности формы

$$-\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -a_{ik}x_ix_k,$$

получаем необходимые и достаточные условия отрицательной определенности квадратичной формы  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_{ik}x_ix_k$  в виде

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти канонический вид, к которому приводятся следующие квадратичные формы посредством ортогонального преобразования, не находя самого преобразования:

- а)  $\varphi = x_1x_2$ ;
- б)  $\varphi = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ ;
- в)  $\varphi = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ;
- г)  $\varphi = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ ;
- д)  $\varphi = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ .

2. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие квадратичные формы к каноническому виду, и написать этот канонический вид:

- а)  $\varphi = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$ ;
- б)  $\varphi = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ ;
- в)  $\varphi = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ ;
- г)  $\varphi = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ ;
- д)  $\varphi = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ .

3. Найти, при каком значении параметра  $a$  следующие квадратичные формы будут положительно определенными:

- а)  $\varphi = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 4ax_2^2$ ;
- б)  $\varphi = 5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ ;
- в)  $\varphi = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ .

4. Доказать, что если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — собственные значения симметричного линейного преобразования, соответствующего квадратичной форме  $\varphi(x, x)$ , заданной на плоскости  $L_2$ , и  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , то

$$\lambda_1 x^2 \leq \varphi(x, x) \leq \lambda_2 x^2.$$

5. Доказать, что все собственные значения симметричной матрицы  $A$  тогда и только тогда лежат на отрезке  $[a, b]$ , когда квадратичная форма  $\varphi$  с матрицей  $A - xE$  положительно определена при любом  $x < a$  и отрицательно определена при любом  $x > b$ .

6. Пусть  $\varphi(x, x) = 1$  — характеристическая поверхность симметричного линейного преобразования  $A$  (гл. III, стр. 78). Определить вид этой поверхности, если собственные значения линейного преобразования  $A$  удовлетворяют следующим условиям:

- а)  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ ;
- б)  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$ ;
- в)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ ;
- г)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ ;
- д)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ;
- е)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ .

## § 7. Представление невырожденного линейного преобразования в виде произведения симметричного и ортогонального преобразований

1. В предыдущем параграфе было доказано, что симметричное линейное преобразование представляет собой три последовательных растяжения или сжатия относительно трех взаимно перпендикулярных осей. Если же преобразование  $A$  не является симметричным, то такое представление для него невозможно. Однако оказывается справедливой следующая теорема.

**Теорема.** *Всякое невырожденное линейное преобразование можно представить в виде произведения ортогонального и симметричного линейных преобразований.*

Пусть  $A$  — любое невырожденное линейное преобразование, заданное в некотором ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Тогда преобразование  $A^*A$ , где  $A^*$  — преобразование, сопряженное  $A$ , будет симметричным. В самом деле, поскольку для любых линейных преобразований  $A$  и  $B$

$$(AB)^* = B^*A^*$$

(гл. III, стр. 114), то для преобразований  $A^*$  и  $A$  имеем

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A,$$

что и доказывает симметричность преобразования  $A^*A$ . Симметричное преобразование  $A^*A$  всегда имеет три единичных взаимно перпендикулярных собственных вектора  $e_1', e_2', e_3'$  (§ 4, стр. 156), так что

$$\begin{aligned}(A^*A)e_1' &= \lambda_1 e_1', \\ (A^*A)e_2' &= \lambda_2 e_2', \\ (A^*A)e_3' &= \lambda_3 e_3'.\end{aligned}\tag{1}$$

Докажем теперь, что собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  этого преобразования будут положительными. Действительно, умножая обе части каждого из равенств (1) скалярно на вектор  $e_i'$ , получим

$$\lambda_{i'} = e_{i'} [(A^*A)e_{i'}] = e_{i'} [A^*(Ae_{i'})] = Ae_{i'} Ae_{i'} = (Ae_{i'})^2 > 0;$$

мы воспользовались здесь результатом упр. 8 к § 5 гл. III, согласно которому для любых векторов  $x$  и  $y$  и любых линейных преобразований  $A$  и  $B$

$$x[A^*(By)] = (AxBy).$$

Рассмотрим теперь линейное преобразование  $H$ , которому в базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  соответствует матрица

$$H' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}.$$



Заметим, что  $H'$  — симметричное линейное преобразование, поскольку  $H'$  — симметричная матрица. Далее, преобразованию  $H^2$  в базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  будет соответствовать матрица

$$H^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

т. е. та же матрица, которая в этом базисе соответствует преобразованию  $A^*A$ . Поэтому

$$A^*A = H^2.$$

Отсюда следует, что

$$A = A^{*-1} H^2 = (A^{*-1} H) H.$$

Осталось показать, что преобразование  $A^{*-1} H$  будет ортогональным. Пусть  $S = A^{*-1} H$ . Рассмотрим преобразование  $S^*$ , сопряженное преобразованию  $S$ :

$$S^* = (A^{*-1} H)^* = H^* (A^{*-1})^* = H A^{-1}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $(A^{*-1})^* = A^{-1}$ , и симметричностью преобразования  $H$ . Отсюда вытекает, что

$$SS^* = A^{*-1} H H A^{-1} = A^{*-1} H^2 A^{-1} = A^{*-1} A^* A A^{-1} = E E = E,$$

т. е.  $S$  — ортогональное преобразование. Таким образом, линейное преобразование  $A$  представлено в виде

$$A = S H,$$

где  $H$  — симметричное, а  $S$  — ортогональное линейные преобразования. Сформулированная теорема доказана.

Геометрический смысл доказанной теоремы состоит в том, что произвольное невырожденное линейное преобразование можно осуществить, произведя последовательно три растяжения вдоль трех взаимно перпендикулярных осей  $e_1, e_2, e_3$  и совершив затем поворот пространства вместе с этими осями.

Заметим, что точно так же доказывается аналогичная теорема для плоскости  $L_2$ .

Отметим, наконец, что при доказательстве теоремы мы указали эффективный способ построения симметричного и ортогонального преобразований, в произведение которых раскла-

дывается данное невырожденное линейное преобразование. Нужно только иметь в виду, что для получения матрицы, соответствующей ортогональному преобразованию  $S = A^{-1}H$ , надо найти матрицу преобразования  $H$  в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  по формуле

$$H = \Gamma^{-1}H'\Gamma,$$

где  $\Gamma$  — матрица перехода от базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  к базису  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ .

2. Рассмотрим два числовых примера.

а) Линейное преобразование  $A$  плоскости  $L_2$ , имеющее в некотором ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$  матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{36}{25} & \frac{2}{25} \\ -\frac{23}{25} & \frac{36}{25} \end{pmatrix},$$

разложить в произведение симметричного и ортогонального преобразований.

Р е ш е н и е. Найдем сначала симметричное преобразование  $A^*A$  и приведем его к простейшему виду. Это преобразование имеет матрицу

$$A^*A = \begin{pmatrix} -\frac{36}{25} & -\frac{23}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{36}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{36}{25} & \frac{2}{25} \\ -\frac{23}{25} & \frac{36}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73}{25} & -\frac{36}{25} \\ -\frac{36}{25} & \frac{52}{25} \end{pmatrix}.$$

Его характеристическим уравнением будет

$$\begin{vmatrix} \frac{73}{25} - \lambda & -\frac{36}{25} \\ -\frac{36}{25} & \frac{52}{25} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Собственные значения  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Соответствующие единичные собственные векторы  $e_1' = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$ ,  $e_2' = \left\{ \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\}$ . В базисе  $\{e_1', e_2'\}$  матрицей преобразования  $A^*A$  будет матрица

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Искомое симметричное преобразование  $H$  имеет в базисе  $\{e_1, e_2\}$  матрицу

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а в базисе  $\{e_1, e_2\}$  — матрицу

$$H = \Gamma^{-1} H' \Gamma = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} \end{pmatrix}.$$

Построим теперь ортогональное преобразование  $S = A^{*-1}H$ . Имеем

$$A^* = \begin{pmatrix} -\frac{36}{25} & -\frac{23}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{36}{25} \end{pmatrix}, \quad A^{*-1} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{25} & -\frac{23}{50} \\ \frac{1}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix},$$

$$S = A^{*-1}H = \begin{pmatrix} -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix}.$$

Заметим еще, что матрица  $S$  может быть представлена в виде

$$S = \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, линейное преобразование  $A$  можно осуществить, совершив сначала растяжение вдоль оси  $e_1$ , с коэффициентом 1, затем растяжение вдоль оси  $e_2$ , с коэффициентом 2, затем отражение плоскости относительно оси  $Oe_2$ , и, наконец, поворот плоскости вокруг точки  $O$  на угол  $\alpha = \arccos \frac{24}{25} \approx 16^\circ$ .

б) Линейное преобразование  $A$  пространства  $L_3$  имеет в некотором ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{14}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}.$$

Разложить преобразование  $A$  в произведение симметричного и ортогонального преобразований.

Р е ш е н и е. Симметричное преобразование  $A^*A$  имеет в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  матрицу

$$A^*A = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{14}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{14}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{53}{9} & -\frac{26}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{26}{9} & \frac{44}{9} & \frac{22}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{22}{9} & \frac{29}{9} \end{pmatrix}.$$

Характеристическим уравнением этого преобразования будет уравнение

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 62\lambda - 72 = 0.$$

Его собственные значения  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 4$ ,  $\lambda_3 = 9$ . Соответствующими единичными собственными векторами будут  $e_1' = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$ ,  $e_2' = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ ,  $e_3' = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$ . Матрицей преобразования  $A^*A$  в базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  будет матрица

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Симметричное преобразование  $H$  — один из множителей, на которые мы раскладываем преобразование  $A$ , — в базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  имеет матрицу

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

а в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  — матрицу

$$H = \Gamma^{-1} H' \Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу ортогонального преобразования  $S = A^{*-1}H$  — второго из множителей, на которые мы раскладываем  $A$ :

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{14}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}, \quad A^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{27} & \frac{13}{27} & -\frac{7}{27} \\ \frac{1}{27} & -\frac{29}{54} & \frac{13}{27} \\ -\frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{14}{27} \end{pmatrix},$$

$$S = A^{*-1}H = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейное преобразование  $A$  разлагается в совокупность трех последовательных растяжений вдоль осей  $e_1, e_2, e_3$ , с коэффициентами 1, 2, 3 соответственно и ортогонального преобразования пространства, определяемого матрицей  $S$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать теорему, аналогичную доказанной в § 7 (стр. 171), для плоскости  $L_2$ .

2. Как надо видоизменить приведенное в тексте доказательство, чтобы доказать, что всякое невырожденное линейное преобразование можно представить в виде произведения симметричного и ортогонального преобразований?

3. Представить в виде произведения ортогонального и симметричного линейных преобразований линейные преобразования, имеющие в некотором прямоугольном базисе матрицы

$$a) \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

## ГЛАВА V

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

#### § 1. Общее уравнение поверхности второго порядка. Его инварианты

1. Как мы уже отмечали (гл. I, стр. 47), общее уравнение поверхности второго порядка в ортогональной системе координат с началом в точке  $O$  имеет вид

$$a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь  $x_1, x_2, x_3$  — координаты точки поверхности второго порядка или радиуса-вектора этой точки.

В настоящей главе мы выясним, как выбрать новый ортонормированный базис, в котором уравнение (1) приняло бы наиболее простой (канонический) вид, и благодаря этому мы сумеем произвести классификацию поверхностей второго порядка.

Изучим, как преобразуются коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $a$  уравнения поверхности второго порядка при различных преобразованиях системы координат, и найдем функции от этих коэффициентов, которые не меняются при таких преобразованиях, т. е. являются инвариантами.

Поскольку поверхность второго порядка рассматривается как множество точек, координаты которых  $x_1, x_2, x_3$  удовлетворяют уравнению (1), то нужно рассмотреть два возможных преобразования системы координат: поворот и параллельный перенос осей координат.

а) Поворот осей координат. Как было доказано (гл. I, стр. 37), при повороте осей координат старые координаты  $x_i$  точки  $M$  связаны с новыми координатами  $x'_i$  этой точки соотношениями

$$x_i = \gamma_{ii'}x'_{i'},$$

где  $\gamma_{ii'}$  — элементы матрицы  $\Gamma^{-1}$ , обратной к ортогональной матрице  $\Gamma = (\gamma_{i'i})$ , определяющей переход от старой системы координат к новой.

После поворота уравнение (1) перейдет в

$$a_{ij}\gamma_{iii'}\gamma_{jj'}x_i x_{j'} + 2a_i\gamma_{ii'}x_{i'} + a = 0. \quad (1')$$

Следовательно, вновь полученное уравнение (1') имеет тот же вид, что и (1):

$$a_{i'j'}x_{i'}x_{j'} + 2a_{i'}x_{i'} + a' = 0,$$

причем, учитывая, что для ортогональной матрицы  $\gamma_{ii'} = \gamma_{i'i}$ , имеем

$$\begin{aligned} a_{i'j'} &= \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}a_{ij}, \\ a_{i'} &= \gamma_{i'i}a_i, \\ a' &= a. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти равенства показывают, что коэффициенты  $a_{ij}$  образуют тензор второй валентности, коэффициенты  $a_i$  — тензор первой валентности, а свободный член  $a$  не меняется при повороте осей (является тензором нулевой валентности).

Отсюда следует, что уравнение (1) можно переписать в виде

$$\varphi(x, x) + 2l(x) + a = 0, \quad (1'')$$

где  $x = x_i e_i$  — радиус-вектор точки поверхности,  $\varphi(x, x)$  — квадратичная форма, а  $l(x)$  — линейная форма от этого радиуса-вектора.

б) Параллельный перенос осей координат. Перейдем от прямоугольной системы координат с началом в точке  $O$  к новой системе координат с теми же базисными векторами  $e_1, e_2, e_3$  и новым началом, расположенным в точке  $O'$ . Запишем разложение радиуса-вектора  $OO'$  точки  $O'$  по базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$  в виде

$$\overline{OO'} = \gamma_i e_i.$$

Как известно (гл. I, стр. 42), новые координаты  $x'_i$  и старые координаты  $x_i$  точки  $M$  связаны соотношением  $x_i = x'_i + \gamma_i$ . Поэтому уравнение (1) в новой системе координат будет иметь вид (см. стр. 49)

$$b_{ij}x'_i x'_j + 2b_i x'_i + b = 0,$$

где

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad b_i = a_{ij}\gamma_j + a_i, \quad b = a_{ij}\gamma_i\gamma_j + 2a_i\gamma_i + a. \quad (3)$$

Таким образом, при параллельном переносе осей коэффициенты  $a_{ij}$  квадратичной формы  $a_{ij}x_ix_j$  не меняются. Отсюда сразу следует, что составленные из коэффициентов  $a_{ij}$  величины

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

которые являются инвариантами тензора  $a_{ij}$  и, следовательно, не меняются при повороте осей координат (гл. IV, стр. 139), не будут изменяться и при параллельном переносе осей, т. е. являются инвариантами общего уравнения поверхности второго порядка относительно наиболее общего преобразования системы координат.

2. Уравнение (1) имеет еще один инвариант относительно общего преобразования системы координат. Этим инвариантом является определитель

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Докажем инвариантность величины  $I_4$ . Для этого заметим прежде всего, что определитель  $I_4$  путем разложения по последней строке и последнему столбцу может быть представлен в виде

$$I_4 = aI_3 - A_{ij}a_ia_j, \quad (5)$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  в определителе  $I_3$ . (Эта формула легко проверяется непосредственным подсчетом.) Как было доказано ранее (см. упр. 1 на стр. 71), эти алгебраические дополнения образуют тензор, который



удовлетворяет соотношению

$$A_{ij}a_{jk} = I_3\delta_{ik}. \quad (6)$$

В выражении (5) первое слагаемое инвариантно относительно поворота, а второе — представляет собой результат полного свертывания и, следовательно, тоже обладает этим свойством. Поэтому  $I_4$  инвариантно относительно поворота.

Докажем теперь инвариантность величины  $I_4$  относительно параллельного переноса. При параллельном переносе величины  $I_3$  и  $A_{ij}$  не изменяются и, следовательно,

$$I'_4 = bI_3 - A_{ij}b_ib_j.$$

Используя соотношения (3) и равенства (6), непосредственно убедимся в том, что  $I'_4 = I_4$ . Таким образом, инвариантность величины  $I_4$  полностью доказана.

3. Докажем теперь, что по отношению к повороту осей координат уравнение (1) имеет еще два инварианта:

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix},$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Для этого рассмотрим уравнение

$$a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \quad (7)$$

которое получено добавлением к левой части уравнения поверхности второго порядка слагаемого, не меняющегося при повороте осей координат. Определитель  $I_4$ , составленный для этого уравнения, зависит от параметра  $\lambda$ ,  $I_4 = I_4(\lambda)$ , и, по доказанному в предыдущем пункте, не меняется при повороте осей координат. Определитель  $I_4(\lambda)$  будет многочленом третьей степени от  $\lambda$ , коэффициентами при  $\lambda$  и  $\lambda^2$  в котором служат величины  $K_3$  и  $K_2$ . Так как параметр  $\lambda$  произволен, то эти коэффициенты также не меняются при повороте, т. е. являются инвариантами относительно поворота осей координат.

Заметим, что коэффициентом при  $\lambda^3$  в правой части будет величина  $a$ , в инвариантности которой по отношению к по-

вороту мы убедились ранее. Коэффициентом при нулевой степени  $\lambda$  будет величина  $I_4$ , также инвариантная при повороте.

Величины  $K_3$  и  $K_2$ , вообще говоря, не будут инвариантны при параллельном переносе осей координат, так как само уравнение (4) не сохраняет своего вида при таком преобразовании. Поэтому их называют *семиинвариантами (полунинвариантами)*.

Найденные инварианты позволят нам в дальнейшем, после того как будет дана классификация поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям, распознавать тип поверхности без приведения к каноническому виду, определять характер множества центров симметрии и, наконец, дадут возможность указать простой способ приведения уравнения поверхности к каноническому виду.

4. Кривые второго порядка на плоскости  $L_2$  определяются уравнением (1), в котором индексы  $i, j$  принимают только значения 1 и 2. Инвариантами уравнения кривой второго порядка будут выражения

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}.$$

Выражение

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}$$

инвариантно только при повороте осей (т. е. является семиинвариантом). Доказательство этих утверждений, аналогичное доказательствам, содержащимся в этом параграфе, предоставляется читателю.

## § 2. Приведение к простейшему виду общего уравнения поверхности второго порядка

1. Пусть в некоторой прямоугольной системе координат с базисными векторами  $e_1, e_2, e_3$  и началом  $O$  общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$a_{ij}x_i x_j + 2a_i x_i + a = 0, \quad (1)$$

где  $a_{ij} = a_{ji}$  и индексы  $i$  и  $j$  принимают значения 1, 2, 3. В предыдущем параграфе было показано, что это уравнение

может быть переписано в виде

$$\varphi(x, x) + 2l(x) + a = 0, \quad (1')$$

где  $x = x_i e_i$  — радиус-вектор точки поверхности,  $\varphi(x, x) = a_{ij} x_i x_j$  — квадратичная, а  $l(x) = a_i x_i$  — линейная формы от  $x$ .

С другой стороны, в § 6 гл. IV мы показали, что, перейдя к другому ортонормированному базису  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  с тем же началом  $O$  (т. е. совершая поворот осей координат), можно привести квадратичную форму  $\varphi(x, x)$  к сумме квадратов:

$$\varphi(x, x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2.$$

При этом векторы  $e_i'$  будут единичными собственными векторами симметричного линейного преобразования  $y_i = a_{ij} x_j$ , соответствующего квадратичной форме  $\varphi$ . Собственные значения этого преобразования определяются из уравнения

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0,$$

где величины  $I_1, I_2, I_3$  задаются формулами (4) § 1. Координаты же самих векторов  $e_i'$  являются нормированными решениями системы (3) § 1 гл. IV (стр. 136).

Относительно прямоугольной системы координат с началом в точке  $O$  и базисом  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  уравнение (1) будет иметь вид

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 + 2a_i' x_i' + a = 0; \quad (2)$$

здесь  $a_i'$  — коэффициенты линейной формы  $l(x)$  в базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$ ,  $a$  — свободный член, который не меняется при повороте осей (см. § 1, стр. 178).

2. Рассмотрим все возможные случаи, которые могут представиться в зависимости от того, сколько имеется нулевых собственных значений.

1. Пусть

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 \neq 0.$$

В этом случае уравнение (2) можно записать в виде

$$\lambda_1 \left( x_1' + \frac{a_1'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( x_2' + \frac{a_2'}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left( x_3' + \frac{a_3'}{\lambda_3} \right)^2 + R = 0, \quad (3)$$

где  $R = a - \left( \frac{a_1^2}{\lambda_1} + \frac{a_2^2}{\lambda_2} + \frac{a_3^2}{\lambda_3} \right)$ . Совершим перенос начала координат в точку  $O' \left( -\frac{a_1}{\lambda_1}, -\frac{a_2}{\lambda_2}, -\frac{a_3}{\lambda_3} \right)$ ; при этом координаты  $x_i'$  подвергнутся преобразованию

$$x_1'' = x_1' + \frac{a_1'}{\lambda_1}, \quad x_2'' = x_2' + \frac{a_2'}{\lambda_2}, \quad x_3'' = x_3' + \frac{a_3'}{\lambda_3},$$

и уравнение (3) примет вид

$$\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + \lambda_3 x_3''^2 + R = 0. \quad (I)$$

Новые оси координат  $O'e_i'$  будут осями симметрии поверхности второго порядка. Их называют *главными осями* этой поверхности. Точка  $O'$  будет центром симметрии поверхности.

II. Пусть в уравнении (2)

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad a_3' \neq 0.$$

Последнее условие означает, что вектор  $l = a_i' e_i'$  не перпендикулярен вектору  $e_3$ . Уравнение (2) в этом случае может быть записано в виде

$$\lambda_1 \left( x_1' + \frac{a_1'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( x_2' + \frac{a_2'}{\lambda_2} \right)^2 + 2a_3' \left( x_3' + \frac{R}{2a_3'} \right) = 0,$$

где

$$R = a - \frac{a_1^2}{\lambda_1} - \frac{a_2^2}{\lambda_2}.$$

Приняв точку  $O' \left( -\frac{a_1}{\lambda_1}, -\frac{a_2}{\lambda_2}, -\frac{R}{2a_3'} \right)$  за новое начало координат, т. е. совершив параллельный перенос системы координат, определяемый формулами

$$x_1'' = x_1' + \frac{a_1'}{\lambda_1}, \quad x_2'' = x_2' + \frac{a_2'}{\lambda_2}, \quad x_3'' = x_3' + \frac{R}{2a_3'},$$

мы приведем уравнение (2) к виду

$$\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + 2a_3' x_3'' = 0. \quad (II)$$

Теперь только ось  $O'e_3'$  будет осью симметрии поверхности, а точка  $O'$  — расположена в ее вершине.

III. Пусть теперь в уравнении (2)

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad a_3' = 0.$$

Последнее условие означает перпендикулярность векторов  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{e}_3'$ . Уравнение (2) имеет в данном случае вид

$$\lambda_1 \left( x_1' + \frac{a_1'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( x_2' + \frac{a_2'}{\lambda_2} \right)^2 + R = 0,$$

где  $R = a - \frac{a_1'^2}{\lambda_1} - \frac{a_2'^2}{\lambda_2}$ . Выбирая за новое начало точку  $O' \left( -\frac{a_1'}{\lambda_1}, -\frac{a_2'}{\lambda_2}, 0 \right)$ , т. е. совершая преобразование координат по формулам

$$x_1'' = x_1' + \frac{a_1'}{\lambda_1}, \quad x_2'' = x_2' + \frac{a_2'}{\lambda_2}, \quad x_3'' = x_3',$$

мы приведем уравнение (2) к виду

$$\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + R = 0. \quad (\text{III})$$

Рассматриваемая поверхность является цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси  $O'\mathbf{e}_3'$ . Эта ось является осью симметрии поверхности.

IV. Пусть, далее, в уравнении (2)

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad a_2'^2 + a_3'^2 > 0;$$

последнее условие означает, что вектор  $\mathbf{l}$  не коллинеарен вектору  $\mathbf{e}_1'$ . Если повернуть базис  $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$  вокруг вектора  $\mathbf{e}_1'$  на угол  $\varphi$ , определяемый равенствами

$$\cos \varphi = \frac{a_2'}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{a_3'}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}},$$

то уравнение (2) примет вид

$$\lambda_1 x_1''^2 + 2a_1' x_1'' + 2\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2} x_2'' + a = 0,$$

где

$$x_1'' = x_1', \quad x_2'' = \frac{a_2' x_2' + a_3' x_3'}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}}, \quad x_3'' = \frac{-a_3' x_2' + a_2' x_3'}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}}.$$

После параллельного переноса начала координат в точку  $O' \left( -\frac{a_1'}{\lambda_1}, -\frac{\lambda_1 a - a_1^2}{2\lambda_1 \sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}}, 0 \right)$  это уравнение примет вид

$$\lambda_1 x_1'' + 2hx_2'' = 0, \quad (IV)$$

где

$$h = \sqrt{a_2'^2 + a_3'^2} \neq 0$$

и

$$x_1''' = x_1'' + \frac{a_1'}{\lambda_1}, \quad x_2''' = x_2'' + \frac{\lambda_1 a - a_1^2}{2\lambda_1 \sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}}, \quad x_3''' = x_3''.$$

Поверхность четвертого типа тоже является цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси  $O'e_3'$ , но у этого цилиндра нет оси симметрии, параллельной образующей, а имеется только одна плоскость симметрии — эта плоскость определяется точкой  $O'$  и векторами  $e_2'$ ,  $e_3'$ .

V. Пусть, наконец, в уравнении (2)

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad a_2' = a_3' = 0.$$

Последние условия означают, что вектор  $l$  коллинеарен вектору  $e_1'$ . Уравнение (2) в этом случае может быть записано в виде

$$\lambda_1 \left( x_1' + \frac{a_1'}{\lambda_1} \right)^2 + R = 0,$$

где  $R = a - \frac{a_1^2}{\lambda_1}$ . Перейдя к новому началу  $O' \left( -\frac{a_1'}{\lambda_1}, 0, 0 \right)$ , т. е. совершив преобразование координат по формулам

$$x_1'' = x_1' + \frac{a_1'}{\lambda_1}, \quad x_2'' = x_2', \quad x_3'' = x_3',$$

мы приведем уравнение (2) к виду

$$\lambda_1 x_1'' + R = 0. \quad (V)$$

В дальнейшем будет показано, что поверхности этого типа представляют собой пару плоскостей (действительных, мнимых или совпадающих), расположенных симметрично относительно плоскости  $O'e_2'e_3'$ .

3. Объединим полученные в этом параграфе результаты в теорему. Условимся при этом обозначать в уравнениях (I)—(V) все индексы по-прежнему без штрихов.

**Теорема.** *Общее уравнение (1) поверхности второго порядка, заданное относительно некоторой прямоугольной системы координат, при помощи поворота и параллельного переноса этой системы координат может быть приведено к одному из следующих пяти типов:*

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + R = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0. \quad (I)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2a_3 x_3 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, a_3 \neq 0. \quad (II)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + R = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0. \quad (III)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + 2hx_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, h \neq 0. \quad (IV)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + R = 0, \quad \lambda_1 \neq 0. \quad (V)$$

Эти пять типов уравнений поверхности второго порядка будем называть *простейшими*.

Очевидно, что *общее уравнение кривой второго порядка на плоскости  $L_2$*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$$

*с помощью поворота осей и их параллельного переноса может быть приведено к одному из следующих трех простейших типов:*

$$I. \quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + R = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0.$$

$$II. \quad \lambda_1 x_1^2 + 2a_2 x_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, a_2 \neq 0.$$

$$III. \quad \lambda_1 x_1^2 + R = 0, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Доказательство этого утверждения, аналогичное доказательству такого же утверждения для поверхности второго порядка, предоставляем читателю.

### § 3. Определение типа поверхности второго порядка при помощи инвариантов

1. В этом параграфе с помощью инвариантов  $I_1, I_2, I_3, I_4$  и семиинвариантов  $K_3$  и  $K_2$  будут даны необходимые и достаточные условия принадлежности поверхности второго порядка к одному из пяти полученных в § 2 типов и указано, как можно выразить коэффициенты уравнений (I) — (V) через эти инварианты.

Прежде всего докажем, что семиинвариант  $K_3$  будет инвариантом для поверхностей III, IV, V типов, а семиинвариант  $K_2$  будет инвариантом для поверхности V типа.

Для доказательства первого утверждения заметим, что поверхности III, IV и V типов характеризуются тем, что в их простейших уравнениях отсутствует переменное  $x_3$ . Добиться этого можно только за счет поворота осей координат (при параллельном переносе осей, очевидно, количество переменных, входящих в уравнение, остается неизменным). Поэтому существует такой базис, получающийся из исходного поворотом (при этом  $K_3$  не меняется), в котором общее уравнение поверхностей III, IV, V типов имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0.$$

Тогда

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}.$$

Инвариантность же полученного определителя при параллельном переносе может быть доказана или непосредственно, или так, как была доказана в § 1 инвариантность  $I_4$  при параллельном переносе.

Для доказательства второго утверждения заметим аналогично, что поскольку в простейших уравнениях поверхностей V типа отсутствуют  $x_2$  и  $x_3$ , то существует базис, получающийся из исходного только поворотом (при этом  $K_2$  не меняется), в котором общее уравнение поверхности V типа имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_1x_1 + a = 0. \quad (1)$$

Следовательно, в этом случае

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix}.$$

После параллельного переноса осей в точку  $O'(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  координаты  $x_i$  преобразуются по формулам

$$x_i = x'_i + \gamma_i,$$



а уравнение поверхности (1) примет вид

$$a_{11}(x'_1)^2 + 2(a_{11}\gamma_1 + a_1)x'_1 + a_{11}\gamma_1^2 + 2a_1\gamma_1 + a = 0.$$

Поэтому

$$K'_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}\gamma_1 + a_1 \\ a_{11}\gamma_1 + a_1 & a_{11}\gamma_1^2 + 2a_1\gamma_1 + a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} = K_2.$$

2. Следующая теорема дает необходимые и достаточные признаки принадлежности поверхности второго порядка к одному из пяти указанных в § 2 типов.

*Теорема. Для того чтобы поверхность второго порядка принадлежала I, II, III, IV или V типу, необходимо и достаточно выполнение следующих признаков:*

- I.  $I_3 \neq 0$ .
- II.  $I_3 = 0$ ,  $I_4 \neq 0$ .
- III.  $I_3 = 0$ ,  $I_4 = 0$ ,  $I_2 \neq 0$ .
- IV.  $I_3 = 0$ ,  $I_4 = 0$ ,  $I_2 = 0$ ,  $K_3 \neq 0$ .
- V.  $I_3 = 0$ ,  $I_4 = 0$ ,  $I_2 = 0$ ,  $K_3 = 0$ ,  $I_1 \neq 0$ .

Заметим сразу, что достаточно доказать необходимость этих признаков, так как достаточность будет тогда вытекать из того, что эти признаки попарно несовместимы и в совокупности исчерпывают все возможности. (Случай, когда  $I_3 = I_4 = I_2 = K_3 = I_1 = 0$ , приводит к обращению в нуль всех коэффициентов при членах второй степени общего уравнения поверхности второго порядка и поэтому исключается из рассмотрения.)

Докажем необходимость указанных признаков для каждого из пяти типов. Достаточно проверить их выполнение в какой-нибудь одной системе координат; в других системах эти признаки будут выполнены автоматически, поскольку имеют инвариантную формулировку. В качестве этой системы координат для каждого из пяти типов поверхностей возьмем ту систему, в которой уравнение поверхности имеет простейший вид (см. формулы (I) — (V) § 2). Тогда необходимость условия доказываемой теоремы проверяется простым подсчетом инвариантов для каждого из этих случаев.

Установленные признаки позволяют легко определить, к какой из пяти групп относится поверхность второго порядка: для этого надо последовательно вычислять  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_2$ ,  $K_3$ ,  $I_1$ .

Поверхность будет относиться к группе, номер которой совпадает с порядковым номером первого отличного от нуля из этих пяти инвариантов.

3. Покажем теперь для каждого из пяти типов поверхностей, как с помощью инвариантов можно сразу перейти от общего уравнения поверхности второго порядка к ее простейшему уравнению.

I. Простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + R = 0.$$

Как мы уже отмечали,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0.$$

Поскольку в этом случае  $I_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 R$ ,  $I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , коэффициент  $R$  выражается так:  $R = \frac{I_4}{I_3}$ , и поэтому простейшее уравнение поверхности I типа имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0. \quad (I')$$

II. В этом случае

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2a_3 x_3 = 0,$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$$

(это следует из того, что  $\lambda_3 = 0$  и  $I_3 = 0$ ). Далее, как легко видеть,

$$I_4 = -\lambda_1 \lambda_2 a_3^2,$$

и поэтому

$$a_3^2 = -\frac{I_4}{I_2}, \quad a_3 = \pm \sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}.$$

Таким образом, простейшее уравнение поверхности II типа принимает вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{I_4}{I_2}} x_3 = 0. \quad (II')$$

III. Теперь

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + R = 0,$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — по-прежнему корни уравнения

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0.$$

Для определения  $R$  заметим, что  $I_2 = \lambda_1\lambda_2$ ; кроме того, подсчет величины  $K_3$ , которая является инвариантом для поверхностей III типа, дает  $K_3 = R\lambda_1\lambda_2$ . Поэтому  $R = \frac{K_3}{I_2}$ , и простейшее уравнение поверхности III типа примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0. \quad (\text{III}')$$

IV. Простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + 2hx_2 = 0,$$

где, поскольку  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ,

$$\lambda_1 = I_1.$$

Подсчет инварианта  $K_3$  для поверхностей этого типа дает  $K_3 = -h^2 I_1$ . Отсюда следует, что  $h = \pm \sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}$ , и окончательно простейшее уравнение поверхностей IV типа примет вид

$$I_1 x_1^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{K_3}{I_1}} x_2 = 0. \quad (\text{IV})$$

V. Поверхности этого типа имеют простейшее уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + R = 0,$$

где, как и в случае IV,  $\lambda_1 = I_1$ . Величина  $K_3$ , которая является инвариантом для поверхностей V типа, оказывается равной  $\lambda_1 R$ , и поэтому  $R = \frac{K_3}{I_1}$ . Таким образом, простейшее уравнение для поверхностей V типа будет выглядеть так:

$$I_1 x_1^2 + \frac{K_3}{I_1} = 0. \quad (\text{V})$$

4. Кривые второго порядка, как отмечалось в конце предыдущего параграфа (стр. 186), можно разделить на три типа по виду их простейших уравнений. Для кривых III типа

можно доказать, что семиинвариант

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}$$

является инвариантом. Необходимые и достаточные условия принадлежности кривых к одному из этих трех типов с помощью инвариантов  $I_1, I_2, I_3$  (см. § 1, стр. 181) могут быть сформулированы следующим образом:

- I.  $I_2 \neq 0$ .
- II.  $I_2 = 0, I_3 \neq 0$ .
- III.  $I_2 = 0, I_3 = 0, I_1 \neq 0$ .

Что касается записи простейших уравнений кривых второго порядка этих трех типов через инварианты  $I_1, I_2, I_3$  и семиинвариант  $K_2$  (который входит только в простейшее уравнение кривых третьего типа), то она имеет вид

$$\text{I. } \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0,$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни уравнения  $\lambda^2 - I_1\lambda + I_3 = 0$ .

$$\text{II. } I_1 x_1^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} x_2 = 0.$$

$$\text{III. } I_1 x_1^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0.$$

Доказательство всех этих утверждений для кривых второго порядка мы предоставляем читателю.

#### § 4. Классификация поверхностей второго порядка

Проведем теперь внутри каждого из пяти полученных в § 2 типов дальнейшую классификацию поверхностей — классификацию, которая бы учитывала все возможные комбинации знаков у отличных от нуля коэффициентов, входящих в простейшие уравнения, а также возможность обращения некоторых коэффициентов в нуль.

I. Простейшее уравнение поверхностей этого типа имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + R = 0.$$

Различные комбинации знаков коэффициентов приводят к следующим случаям:

I<sub>1</sub>.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  одного знака, который противоположен знаку  $R, R \neq 0$ . Тогда простейшее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad (I_1)$$

где  $a_i^2 = -\frac{R}{\lambda_i}$ . Уравнение (I<sub>1</sub>) является, как известно, каноническим уравнением эллипсоида.

I<sub>2</sub>.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, R$  одного знака. Перепишем уравнение (I) в виде

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad (I_2)$$

где  $a_i^2 = \frac{R}{\lambda_i}$ . Уравнение (I<sub>2</sub>) является каноническим уравнением мнимого эллипсоида \*). Не существует ни одной действительной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (I<sub>2</sub>).

I<sub>3</sub>.  $\lambda_1, \lambda_2$  одного знака, а  $\lambda_3$  и  $R$  имеют знак, противоположный знаку  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Уравнение (I) в этом случае можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad (I_3)$$

где  $a_1^2 = -\frac{R}{\lambda_1}, a_2^2 = -\frac{R}{\lambda_2}, a_3^2 = \frac{R}{\lambda_3}$ . Мы получили каноническое уравнение однополостного гиперболоида.

I<sub>4</sub>.  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $R$  одного знака, противоположного знаку  $\lambda_3$ . Обозначая  $\frac{R}{\lambda_1}, \frac{R}{\lambda_2}, -\frac{R}{\lambda_3}$  соответственно через  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$ , получим уравнение

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad (I_4)$$

которое является каноническим уравнением двуполостного гиперболоида.

I<sub>5</sub>.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одного знака, противоположного знаку  $\lambda_3$ , а  $R=0$ .

---

\*) Название «мнимый эллипсоид» объясняется сходством уравнения (I<sub>2</sub>) с уравнением (I<sub>1</sub>).

Уравнение (I) можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0, \quad (I_5)$$

где  $a_i^2 = \frac{1}{|\lambda_i|}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Уравнение ( $I_5$ ) есть каноническое уравнение конуса второго порядка.

$I_6$ .  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  одного знака, а  $R = 0$ . Тогда уравнение (I) можно записать в каноническом виде:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0, \quad (I_6)$$

где по-прежнему  $a_i^2 = \frac{1}{|\lambda_i|}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Уравнению ( $I_6$ ) удовлетворяют только координаты точки  $(0, 0, 0)$ . Будем говорить, что уравнение ( $I_6$ ) определяет мнимый конус с действительной вершиной.

II. Простейшее уравнение поверхностей второго типа записывается в виде

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2a_3 x_3 + 0,$$

где  $a_3 \neq 0$ . Этот тип приводит нас к двум существенно различным видам поверхностей:

II<sub>1</sub>.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одного знака. Можно считать, что  $a_3$  имеет знак, противоположный знаку  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ; в противном случае можно добиться этого, изменив направление оси  $Ox_3$ . Поэтому, обозначая положительные в силу условия величины  $-\frac{a_3}{\lambda_1}$  и  $-\frac{a_3}{\lambda_2}$  соответственно через  $p$  и  $q$ , придем к уравнению

$$\frac{x_1^2}{p} + \frac{x_2^2}{q} = 2x_3, \quad (II_1)$$

которое является каноническим уравнением эллиптического параболоида.

II<sub>2</sub>.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  разных знаков. Тогда, если считать, что знак  $\lambda_1$  противоположен знаку  $a_3$ , то, обозначая  $-\frac{a_3}{\lambda_1}$  через  $p$  и  $\frac{a_3}{\lambda_2}$  через  $q$  ( $p > 0, q > 0$ ), получим каноническое уравнение

$$\frac{x_1^2}{p} - \frac{x_2^2}{q} = 2x_3 \quad (II_2)$$

гиперболического параболоида.

III. Простейшее уравнение поверхностей этого типа записывается так:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + R = 0.$$

Здесь могут представиться следующие возможности:

III<sub>1</sub>.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одного знака, а  $R$  имеет противоположный знак. Тогда уравнение (III) можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \quad (\text{III}_1)$$

где  $a_1 = -\frac{R}{\lambda_1}$ ,  $a_2 = -\frac{R}{\lambda_2}$ . Получаем каноническое уравнение эллиптического цилиндра.

III<sub>2</sub>.  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $R$  одного знака. Тогда, полагая

$$\frac{R}{\lambda_1} = a_1^2, \quad \frac{R}{\lambda_2} = a_2^2,$$

приводим уравнение (III) к каноническому виду:

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1. \quad (\text{III}_2)$$

Мы получили уравнение поверхности, не имеющей ни одной точки с действительными координатами. Эту поверхность называют мнимым эллиптическим цилиндром.

III<sub>3</sub>.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  разных знаков,  $R \neq 0$ . Тогда, если  $\lambda_1$  имеет знак, противоположный знаку  $R$ , то, полагая  $a_1^2 = -\frac{R}{\lambda_1}$ ,  $a_2^2 = \frac{R}{\lambda_2}$ , приводим уравнение (III) к каноническому виду:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1. \quad (\text{III}_3)$$

Это уравнение представляет собой каноническое уравнение гиперболического цилиндра.

III<sub>4</sub>.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  разных знаков,  $R = 0$ . Обозначая  $a_1^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$ ,  $a_2^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$ , получим каноническое уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0 \quad (\text{III}_4)$$

двух пересекающихся плоскостей  $\frac{x_1}{a_1} \pm \frac{x_2}{a_2} = 0$ .

III<sub>5</sub>.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одного знака,  $R=0$ . Обозначая опять  $a_2^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$ ,  $a_2^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$ , приведем уравнение (III) к каноническому виду:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0. \quad (\text{III}_5)$$

Уравнению (III<sub>5</sub>) удовлетворяют координаты точек, лежащих на прямой  $x_1 = x_2 = 0$ . Будем говорить, что уравнение (III<sub>5</sub>) определяет пару мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой.

IV. Простейшее уравнение поверхностей четвертого типа записывается в виде

$$\lambda_1 x_1^2 + 2hx_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad h \neq 0.$$

Здесь можно получить только один тип поверхности:

$$x_1^2 = 2px_2, \quad (\text{IV}_1)$$

где  $p = -\frac{h}{\lambda_1}$ . Уравнение (IV<sub>1</sub>) является каноническим уравнением параболического цилиндра.

V. Поверхности пятого типа имеют простейшее уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + R = 0, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Здесь имеются три возможности:

V<sub>1</sub>.  $\lambda_1$  и  $R$  имеют противоположные знаки. Тогда (V) принимает вид

$$x_1^2 = a^2, \quad (\text{V}_1)$$

где  $a^2 = -\frac{R}{\lambda_1}$ , и представляет собой каноническое уравнение двух параллельных плоскостей.

V<sub>2</sub>.  $\lambda_1$  и  $R$  одного знака. Тогда, обозначая  $a^2 = \frac{R}{\lambda_1}$ , придем к каноническому уравнению

$$-x_1^2 = a^2 \quad (\text{V}_2)$$

двух мнимых параллельных плоскостей.



$V_3. R=0$ . Уравнение (V) принимает вид

$$x_1^2 = 0 \quad (V_3)$$

и представляет собой каноническое уравнение двух совпадающих плоскостей.

Таким образом, всего мы получили 17 возможных, геометрически различных видов поверхностей второго порядка.

Что касается кривых второго порядка, то они делятся на девять видов:

I<sub>1</sub>. Эллипс:  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ .

I<sub>2</sub>. Мнимый эллипс:  $-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ .

I<sub>3</sub>. Гипербола:  $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ .

I<sub>4</sub>. Две пересекающиеся прямые:  $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ .

I<sub>5</sub>. Две мнимые прямые, пересекающиеся в действительной точке:  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ .

II. Парабола:  $x_1^2 = 2px_2$ ,  $p \neq 0$ .

III<sub>1</sub>. Две параллельные прямые:  $x_1^2 = a^2$  ( $a \neq 0$ ).

III<sub>2</sub>. Две мнимые параллельные прямые:  $-x_1^2 = a^2$  ( $a \neq 0$ ).

III<sub>3</sub>. Две совпадающие прямые:  $x_1^2 = 0$ .

Указанная классификация и соответствующие канонические уравнения без труда могут быть получены читателем.

### § 5. Приложение теории инвариантов к классификации поверхностей второго порядка

В этом параграфе мы каждый из 17 полученных в § 4 видов поверхностей второго порядка охарактеризуем с помощью инвариантов  $I_1, I_2, I_3, I_4$  и семиинвариантов  $K_3$  и  $K_2$ , первый из которых является инвариантом для поверхностей III, IV, V типов, а второй — для поверхностей V типа. В приводимой ниже таблице даются необходимые и достаточные условия принадлежности поверхности второго порядка каждому из 17 видов.

Т а б л и ц а

№ пп	Название поверхности	Признаки класса	Каноническое уравнение
Поверхности I типа, $I_3 \neq 0$			
1	Эллипсоид . . . . .	$I_4 < 0, I_2 > 0, I_1 I_3 > 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$
2	Мнимый эллипсоид	$I_4 > 0, I_2 > 0, I_1 I_3 > 0$	$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$
3	Однополостный гиперболоид . .	$I_4 > 0, I_2 \leq 0$ или $I_1 I_3 \leq 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$
4	Двуполостный гиперболоид . .	$I_4 < 0, I_2 \leq 0$ или $I_1 I_3 \leq 0$	$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$
5	Конус второго порядка . . . . .	$I_4 = 0, I_2 \leq 0$ или $I_1 I_3 \leq 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$
6	Мнимый конус . .	$I_4 = 0, I_2 > 0, I_1 I_3 > 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$
Поверхности II типа, $I_3 = 0, I_4 \neq 0$			
7	Эллиптический параболоид . . .	$I_4 < 0$	$\frac{x_1^2}{p} + \frac{x_2^2}{q} = 2x_3$ ( $p > 0, q > 0$ )
8	Гиперболический параболоид . . .	$I_4 > 0$	$\frac{x_1^2}{p} - \frac{x_2^2}{q} = 2x_3$ ( $p > 0, q > 0$ )
Поверхности III типа, $I_3 = 0, I_4 = 0, I_2 \neq 0$			
9	Эллиптический цилиндр . . . . .	$I_2 > 0, I_1 K_3 < 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$
10	Мнимый эллипти- ческий цилиндр	$I_2 > 0, I_1 K_3 > 0$	$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$
11	Гиперболический цилиндр . . . . .	$I_2 < 0, K_3 \neq 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$
12	Две пересекаю- щиеся плоскости	$I_2 < 0, K_3 = 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$

Продолжение табл.

№ пп	Название поверхности	Признаки класса	Каноническое уравнение
13	Две мнимые пересекающиеся плоскости . . . . .	$I_2 > 0, K_3 = 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
Поверхности IV типа, $I_3 = 0, I_4 = 0, I_2 = 0, K_3 \neq 0$			
14	Параболический цилиндр . . . . .	$K_3 \neq 0$	$x_1^2 = 2px_2 \ (p \neq 0)$
Поверхности V типа, $I_3 = 0, I_4 = 0, I_2 = 0, K_3 = 0$			
15	Две параллельные плоскости . . .	$K_2 < 0$	$x_1^2 = a^2$
16	Две мнимые параллельные плоскости . . . . .	$K_2 > 0$	$-x_1^2 = a^2$
17	Две совпадающие плоскости . . .	$K_2 = 0$	$x_1^2 = 0$

Отметим прежде всего, что все указанные в таблице признаки являются инвариантными относительно общего преобразования системы координат, так как  $I_1, I_2, I_3, I_4$  инвариантны при таком преобразовании,  $K_2$  и  $K_3$  тоже инвариантны при общем преобразовании для поверхностей тех типов, в признаки которых они входят.

Кроме того, эти признаки оказываются инвариантными по отношению к умножению левой части уравнения поверхности на некоторое число  $s \neq 0$ , так как при таком умножении величины  $I_1, I_2, I_3, I_4, K_2$  и  $K_3$  умножаются соответственно на  $s, s^2, s^3, s^4, s^2$  и  $s^3$ . Отсюда следует, что при доказательстве необходимости указанных условий можно исходить из канонических уравнений каждого вида поверхности второго порядка.

Проверим, например, необходимость выполнения указанных в таблице признаков для эллипсоида, однополостного гиперболоида, гиперболического параболоида, мнимого эллиптического цилиндра, параболического цилиндра и двух параллельных плоскостей.

1. Эллипсоид:  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$ . Для него имеем

$$I_1 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}, \quad I_2 = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} + \frac{1}{a_2^2 a_3^2} + \frac{1}{a_1^2 a_3^2},$$

$$I_3 = -I_4 = \frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2}.$$

Отсюда видно, что для эллипсоида  $I_2 > 0$ ,  $I_1 I_3 > 0$ ,  $I_4 < 0$ .

3. Однополостный гиперболоид:  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$ . Имеем

$$I_1 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_3^2}, \quad I_2 = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} - \frac{1}{a_2^2} \left( \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} \right),$$

$$I_3 = -I_4 = \frac{-1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2}.$$

Если  $I_2 > 0$ , то

$$\frac{1}{a_3^2} < \frac{\frac{1}{a_1^2 a_2^2}}{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2},$$

и потому

$$I_1 I_3 = \frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \left( \frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) < \frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \left( \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) =$$

$$= -\frac{a_1^4 + a_1^2 a_2^2 + a_2^4}{a_1^4 a_2^4 a_3^2 (a_1^2 + a_2^2)} < 0.$$

Аналогично, если  $I_1 I_3 > 0$ , то

$$\frac{1}{a_3^2} > \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}$$

и

$$I_2 = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} - \frac{1}{a_3^2} \left( \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) < \frac{1}{a_1^2 a_2^2} - \left( \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right)^2 =$$

$$= -\left( \frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{a_1^2 a_2^2} + \frac{1}{a_2^4} \right) < 0.$$

Поэтому соотношения  $I_2 > 0$  и  $I_1 I_3 > 0$  в этом случае несовместны и, следовательно, или  $I_2 \leq 0$ , или  $I_1 I_3 \leq 0$ .

8. Гиперболический параболоид:  $\frac{x_1^2}{p} - \frac{x_2^2}{q} = 2x_3$ . Тогда

$$I_3 = 0, \quad I_4 = \frac{1}{pq} > 0.$$

10. Мнимый эллиптический цилиндр:  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = -1$ . Имеем

$$I_3 = 0, \quad I_4 = 0, \quad I_2 = K_3 = \frac{1}{a_1^2 a_2^2}, \quad I_1 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2},$$

$$I_2 > 0, \quad I_1 K_3 > 0.$$

14. Параболический цилиндр:  $x_1^2 = 2px_2$  ( $p \neq 0$ ). В этом случае

$$I_2 = I_3 = I_4 = 0, \quad K_3 = -p^2 \neq 0.$$

15. Две параллельные плоскости:  $x_1^2 = a^2$  ( $a \neq 0$ ). Здесь

$$I_2 = I_3 = I_4 = K_3 = 0, \quad K_2 = -a^2 < 0.$$

В остальных случаях доказательство необходимости проводится аналогично, и мы предоставляем его читателю.

Что касается достаточности условий, содержащихся в таблице, то она вытекает из несовместности любых двух из 17 приведенных признаков и из того, что эти признаки исчерпывают все возможности.

Для кривых второго порядка аналогичную таблицу можно получить, рассмотрев девять последних строк приведенной таблицы, в которой вместо слов «эллиптический цилиндр», «мнимый эллиптический цилиндр», «гиперболический цилиндр», «параболический цилиндр» надо написать «эллипс», «мнимый эллипс», «гипербола», «парабола»; а вместо слова «плоскости» поставить слово «прямые». Это следует из того, что уравнение

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$$

определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси  $e_3$ , и с направляющей, которая в плоскости  $(e_1, e_2)$  определяется тем же уравнением, что и сама цилиндрическая поверхность.

Кроме того, если написанное уравнение рассматривать как уравнение поверхности и подсчитать для него инварианты  $I'_1, I'_2, I'_3, I'_4$  и семиинварианты  $K'_2$  и  $K'_3$ , то окажется, что  $I'_3 = I'_4 = 0$ , а  $I'_1, I'_2, K'_3$  и  $K'_2$  совпадают соответственно с инвариантами  $I_1, I_2, I_3$  и семиинвариантом  $K_3$ , определенными для кривой (ср. § 1, стр. 181).

## § 6. Центральные и нецентральные поверхности второго порядка

1. Рассмотрим сначала поверхность второго порядка, в общем уравнении которой отсутствуют члены с первыми степенями координат:

$$a_{ij}x_ix_j + a = 0. \quad (1)$$

Если на такой поверхности лежит точка с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ , то на ней же лежит и точка с координатами  $(-x_1, -x_2, -x_3)$ , симметричная с первой точкой относительно начала координат. Таким образом, в рассматриваемом случае начало координат служит центром симметрии поверхности.

Легко доказать, что и, наоборот, если начало координат служит центром симметрии поверхности второго порядка, то ее уравнение имеет вид (1).

Если существует в пространстве точка, относительно которой поверхность второго порядка симметрична, то эту точку называют *центром поверхности*. Следовательно, в случае, когда поверхность второго порядка определена уравнением (1), начало координат является ее центром.

Пусть теперь поверхность второго порядка в некоторой прямоугольной системе координат задана своим общим уравнением

$$a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что если поверхность, определенная уравнением (2), имеет центр, то, перенося начало координат в центр, мы должны прийти к уравнению вида (1). При этом формулы преобразования координат, как мы знаем (гл. I, стр. 42), имеют вид

$$x_i = x'_i + \gamma_i,$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  — координаты нового начала в старой системе.

При таком преобразовании системы координат коэффициенты уравнения поверхности второго порядка преобразуются по формулам (3) § 1. Из этих формул нам сейчас понадобится формула преобразования коэффициентов при членах первой степени:

$$b_i = a_{ij}\gamma_j + a_i. \quad (3)$$

Чтобы новое начало координат было центром заданной поверхности второго порядка, необходимо и достаточно обращение в нуль коэффициентов  $b_i$ . Поэтому координаты центра по отношению к старой системе координат должны удовлетворять системе уравнений

$$a_{ij}\gamma_j + a_i = 0, \quad (4)$$

которая более подробно записывается так:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}\gamma_3 + a_1 &= 0, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + a_{23}\gamma_3 + a_2 &= 0, \\ a_{31}\gamma_1 + a_{32}\gamma_2 + a_{33}\gamma_3 + a_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

Мы докажем далее, что вопрос о существовании центра поверхности второго порядка тесно связан с той классификацией этих поверхностей, которая была проведена в §§ 2 и 3. Исследование разрешимости системы уравнений (4'), определяющей координаты центра, сводится к сравнению рангов матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{pmatrix},$$

которые мы обозначим соответственно через  $r$  и  $r_1$ . А именно, как известно из алгебры (см., например, [8]), система уравнений (4') имеет решение только в том случае, когда  $r = r_1$ , и не имеет решения при  $r < r_1$ . Причем в первом случае при  $r = 3$  она имеет единственное решение, при  $r = 2$  совокупность ее решений геометрически представляет собой прямую линию, а при  $r = 1$  — плоскость.

Докажем сначала, что ранги  $r$  и  $r_1$  не меняются при преобразованиях прямоугольной системы координат. В самом деле, так как при параллельном переносе компоненты матрицы  $A$  вообще не меняются, то, значит, не меняется и ее ранг. При повороте системы координат компоненты матрицы  $A$  преобразуются, как компоненты матрицы линейного оператора, поэтому ранг ее не меняется (ср. с § 3 гл. III). Таким образом, инвариантность ранга  $r$  доказана.

Что касается матрицы  $A_1$ , то при параллельном переносе первые три ее столбца не меняются, а последний преобра-

зуется по формулам (3), и это, как легко видеть, не меняет ее ранга. При повороте системы координат, определяемом ортогональной матрицей  $\Gamma = (\gamma_{i' i})$ , элементы матрицы  $A_1$  преобразуются по формулам (2) § 1, первые из которых можно записать в виде

$$a_{i' j'} = \gamma_{i' i} a_{ij}, \quad \text{где} \quad a_{ij} = \gamma_{j' j} a_{ij}.$$

Поэтому преобразование матрицы  $A_1$  в матрицу  $A_1'' = (a_{i' j'}, a_{i' i})$  можно разбить на два последовательных преобразования, первое из которых переводит матрицу  $A_1$  в матрицу  $A_1' (a_{ij'}, a_i)$ , а второе — матрицу  $A_1'$  в  $A_1''$ . Столбцы матрицы  $A_1'$  являются линейными комбинациями столбцов матрицы  $A_1$ , и поэтому ее ранг  $r_1'$  не превосходит  $r_1$ . Строки матрицы  $A_1'$  являются линейными комбинациями строк матрицы  $A_1'$ , и поэтому ее ранг  $r_1''$  не превосходит  $r_1'$ . Таким образом,  $r_1'' \leq r_1$ . Но при обратном повороте матрицей  $\Gamma^{-1}$ , матрица  $A_1''$  переходит в  $A_1$  и, следовательно,  $r_1 \leq r_1''$ . Поэтому  $r_1 = r_1''$ , что окончательно доказывает инвариантность ранга  $r_1$ .

2. Теперь легко убедиться, что существует следующая связь между принадлежностью поверхности второго порядка к одному из пяти типов, введенных в § 2, и значениями рангов  $r$  и  $r_1$  матриц  $A$  и  $A_1$ :

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| для поверхностей I типа   | $r = 3, \quad r_1 = 3;$ |
| для поверхностей II типа  | $r = 2, \quad r_1 = 3;$ |
| для поверхностей III типа | $r = 2, \quad r_1 = 2;$ |
| для поверхностей IV типа  | $r = 1, \quad r_1 = 2;$ |
| для поверхностей V типа   | $r = 1, \quad r_1 = 1.$ |

Чтобы доказать это предложение, следует перейти к той системе координат, в которой уравнение поверхности имеет простейший вид, записать соответствующие ему матрицы  $A$  и  $A_1$  и непосредственно подсчитать ранги.

После этого уже легко решить вопрос о существовании центра поверхности второго порядка. Если поверхность принадлежит первому типу, то  $r = r_1 = 3$  и система (4') имеет единственное решение. Следовательно, поверхность имеет единственный центр. Если поверхность принадлежит третьему типу, то  $r = r_1 = 2$ , система (4') имеет однопараметрическое семейство решений, а поверхность — однопараметрическое семейство центров, расположенных на одной прямой. Эту



прямую называют *прямой центров*. Если поверхность принадлежит пятому типу, то  $r=r_1=1$  и совокупность ее центров образует плоскость — *плоскость центров*. Наконец, так как для поверхностей II и IV типов  $r < r_1$ , то эти поверхности центров не имеют.

Поскольку отмеченные здесь случаи исчерпывают все возможности, имеют место и обратные предложения. Таким образом, справедлива следующая

**Теорема.** *Поверхность второго порядка имеет единственный центр тогда и только тогда, когда она принадлежит типу I; имеет прямую центров, когда она принадлежит типу III; имеет плоскость центров, когда она принадлежит типу V. Она не имеет центра тогда и только тогда, когда принадлежит типам II или IV.*

Заметим, что поверхности, имеющие единственный центр симметрии, называются *центральными* поверхностями второго порядка.

## § 7. Примеры

Рассмотрим несколько примеров исследования общего уравнения поверхности второго порядка.

1. Определить вид поверхности второго порядка и ее расположение, если в некоторой прямоугольной системе координат она имеет уравнение

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2 = 0.$$

**Решение.** Имеем  $I_3 = -15 \neq 0$ ; отсюда уже следует, что это поверхность I типа и поэтому она имеет единственный центр. Далее находим  $I_4 = -12 < 0$ ,  $I_1 = -1$ . Поэтому  $I_1 I_3 > 0$ . Следовательно, рассматриваемая поверхность представляет собой двуполостный гиперboloид (см. таблицу, стр. 197).

Находим еще ее инвариант  $I_2: I_2 = -17$ . Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 17\lambda + 15 = 0,$$

соответствующее этой поверхности, имеет корни  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = -5$ . Следовательно, ее простейшее уравнение запишется в виде

$$x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 + \frac{4}{5} = 0,$$

а каноническое уравнение —

$$-\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{15} + \frac{x_3^2}{4} = 1.$$

Координаты центра рассматриваемой поверхности находим из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 1 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2 &= 0, \\ -5x_3 - 2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

которая дает  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -\frac{2}{5}$ , т. е. центром поверхности будет точка  $O' \left( 0, 1, -\frac{2}{5} \right)$ .

Определим теперь векторы  $e_1'$ ,  $e_2'$ ,  $e_3'$ , направленные вдоль главных осей рассматриваемой поверхности. Координаты вектора  $e_1'$  являются нормированными решениями системы

$$\left. \begin{aligned} (2-1)x_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + (2-1)x_2 &= 0, \\ (-5-1)x_3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда  $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : (-1) : 0$  и  $e_1' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$ .

Аналогично находим

$$e_2' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}, \quad e_3' = \{0, 0, 1\}.$$

2. Определить вид поверхности второго порядка и ее расположение, если в некоторой прямоугольной системе координат она имеет уравнение

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3 = 0.$$

Решение. Находим

$$I_3 = 0, \quad I_4 = -125 < 0.$$

Следовательно, поверхность представляет собой эллиптический параболоид (см. таблицу, стр. 197). Далее имеем

$$I_1 = 7, \quad I_2 = 10, \quad \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5.$$

Поэтому простейшее уравнение поверхности выглядит так:

$$2x_1^2 + 5x_2^2 - 5\sqrt{2}x_3 = 0,$$

а ее каноническое уравнение запишется в виде

$$\frac{x_1^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}} + \frac{x_2^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2x_3,$$

т. е. для этой поверхности  $p = \frac{5}{2\sqrt{2}}$ ,  $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Вектор  $e_3'$ , соответствующий собственному значению  $\lambda_3 = 0$ , направленный в сторону вогнутости по оси параболоида, определим из системы

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

которая дает  $e_3' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$ . Аналогично находим векторы  $e_1'$  и  $e_2'$ , которые параллельны главным осям эллипсов, получающихся в сечении эллиптического параболоида плоскостями, перпендикулярными его осям:

$$e_1' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right\}, \quad e_2' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Для определения вершины параболоида рассмотрим плоскость  $x_1 - x_2 = m$ , перпендикулярную оси параболоида. Эта плоскость пройдет через вершину тогда и только тогда, когда она будет иметь с параболоидом только одну общую точку. Уравнения сечения параболоида указанной плоскостью имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 + m, \\ 8x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3 + (8m + 2)x_2 + \\ &+ (2m - 2)x_3 + 2m^2 - 4m + 3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Так как эта линия распадается на две мнимые пересекающиеся прямые, то (см. § 5, стр. 200)

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 4m+1 \\ 2 & 3 & m-1 \\ 4m+1 & m-1 & 2m^2-4m+3 \end{vmatrix} = 0,$$

или  $100m - 45 = 0$ , откуда  $m = 0,45$ .

Координаты  $x_2$  и  $x_3$  вершины определим как координаты центра кривой (\*):

$$\begin{cases} 8x_2 + 2x_3 + (4 \cdot 0,45 + 1) = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 + (0,45 - 1) = 0, \end{cases}$$

откуда  $x_2 = -\frac{19}{40}$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}$ , а из системы (\*) находим, что  $x_1 = -\frac{1}{40}$ . Таким образом, вершиной параболоида служит точка

$$O' \left( -\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2} \right).$$

3. Определить вид и расположение поверхности второго порядка, которая в некотором прямоугольном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  имеет уравнение

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + \\ + 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Решение. Имеем

$$I_3 = I_4 = 0, \quad I_2 = -36 < 0, \quad K_3 = 72 \neq 0.$$

Следовательно, поверхность представляет гиперболический цилиндр (см. таблицу, стр. 197). Далее находим

$$I_1 = 0, \quad \lambda^2 - 36 = 0, \quad \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -6.$$

Простейшее уравнение поверхности имеет вид

$$6x_1'^2 - 6x_2'^2 - 2 = 0,$$

а каноническое уравнение — вид

$$\frac{x_1'^2}{\frac{1}{3}} - \frac{x_2'^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Ось цилиндра найдем, определив его прямую центров из системы

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 1 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2 &= 0, \\ -5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Два первых уравнения этой системы независимы, они и являются уравнениями оси цилиндра. Направляющим единичным вектором этой оси служит вектор  $e_{3'} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$ . В качестве точки  $O'$  может быть взята любая точка этой оси. Векторы  $e_{1'}$  и  $e_{2'}$  находим как собственные векторы, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = -6$ :

$$e_{1'} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \quad e_{2'} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Эти векторы параллельны действительной и мнимой оси гиперболической, которая служит направляющей гиперболического цилиндра.

4. Определить вид и расположение поверхности второго порядка, которая в некотором прямоугольном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  имеет уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1 - 6x_3 + 1 = 0.$$

Решение. Находим

$$I_3 = 0, \quad I_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = -18, \quad I_1 = 6.$$

Согласно таблице (стр. 198) рассматриваемая поверхность представляет собой параболический цилиндр. Его простейшее уравнение имеет вид

$$6x_1'^2 - 2\sqrt{3}x_2' = 0,$$

а каноническое — вид

$$x_1'^2 = \frac{x_2'}{\sqrt{3}},$$

т. е. для этой поверхности  $p = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ . Чтобы определить расположение этого цилиндра, найдем главные направления

квадратичной формы, стоящей в левой части его уравнения. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 = 0,$$

откуда  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_1 = 6$ . Система уравнений для определения главных направлений этой формы записывается так:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda)x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + (1 - \lambda)x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + (4 - \lambda)x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  получим отсюда одно уравнение:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

Следовательно, векторы  $e_2'$  и  $e_3'$  лежат в плоскости, определяемой этим уравнением. Вектор  $e_1'$  перпендикулярен указанной плоскости и потому имеет вид  $e_1' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right\}$ .

В качестве вектора  $e_2'$  можно взять вектор  $e_2' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$ .

Тогда  $e_3' = e_1' \times e_2' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ . Координаты  $x_{i'}$  и  $x_i$  будут связаны формулами:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{1'} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x_{2'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \\ x_{3'} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 - x_3), \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}x_{1'} + \frac{1}{\sqrt{2}}x_{2'} + \frac{1}{\sqrt{3}}x_{3'}, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}x_{1'} - \frac{1}{\sqrt{2}}x_{2'} + \frac{1}{\sqrt{3}}x_{3'}, \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{6}}x_{1'} - \frac{1}{\sqrt{3}}x_{3'}. \end{aligned} \right.$$

После перехода к координатам  $x_{i'}$  уравнение цилиндра принимает вид

$$6x_{1'}^2 - 2\sqrt{6}x_{1'} + 2\sqrt{3}x_{3'} + 1 = 0.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$\left( x_{1'} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_{3'} = 0.$$

Теперь делаем параллельный перенос вдоль оси, определяемый формулой

$$x_1'' = x_1' - \frac{1}{\sqrt{6}},$$

и поворот в плоскости  $Oe_2'e_3'$ , определяемый формулами

$$x_2'' = -x_3', \quad x_3'' = x_2'.$$

После этих преобразований уравнение цилиндра записывается в каноническом виде:

$$x_1^2'' - \frac{1}{\sqrt{3}} x_2'' = 0.$$

Координаты  $x_i''$  выражаются через исходные координаты  $x_i$  по формулам

$$\begin{aligned} x_1'' &= \frac{x_1}{\sqrt{6}} + \frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{2x_3}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ x_2'' &= -\frac{x_1}{\sqrt{3}} - \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \\ x_3'' &= \frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение плоскости симметрии цилиндра, которое в новых координатах имеет вид  $x_1'' = 0$ , в исходных координатах выглядит так:  $x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0$ . Плоскость  $x_2'' = 0$  касается параболического цилиндра вдоль той его образующей, по которой он пересекается с плоскостью симметрии. Ее уравнение в исходной системе координат записывается в виде  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ . Плоскость  $x_3'' = 0$  будет перпендикулярна образующей. Ее первоначальное уравнение:  $x_1 - x_2 = 0$ . Точка  $O''$  лежит на пересечении этих трех плоскостей. Ее координаты по отношению к исходной системе:  $x_1 = x_2 = \frac{1}{6}$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}$ . Вектор  $e_3'' = e_2'$  направлен вдоль образующей цилиндра, вектор  $e_1'' = e_1'$  — перпендикулярно плоскости симметрии, и вектор  $e_2'' = -e_3'$  — в плоскости симметрии перпендикулярно образующей.

5. Определить вид и расположение поверхности, заданной в некотором прямоугольном базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  уравнением

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - \\ - 12x_2x_3 - x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Решение. Имеем

$$l_3 = l_4 = l_2 = K_3 = 0, \quad l_1 = 14, \quad K_2 = -87,5 < 0.$$

Следовательно, мы получаем пару параллельных плоскостей, каноническое уравнение которых

$$x_1^2 = \frac{87,5}{14}.$$

Чтобы найти уравнение этих плоскостей в исходной системе координат, заметим, что квадратичная форма, содержащаяся в левой части исходного уравнения, представляет собой полный квадрат, и уравнение может быть переписано в виде

$$(x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6 = 0.$$

Выделяя в левой части этого уравнения полный квадрат, получим

$$\left(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0.$$

Левая часть уравнения раскладывается на два сомножителя:

$$(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3)(x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2) = 0.$$

Поэтому уравнения пары параллельных плоскостей, определяемых заданным уравнением второго порядка, в исходной системе координат записываются в виде

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0,$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2 = 0.$$

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать сформулированные в конце §§ 1—5 утверждения, относящиеся к кривым второго порядка на плоскости  $L_2$ .

2. Установить, какие из классов кривых второго порядка имеют центр и какие — не имеют.

3. Определить вид кривой второго порядка и ее расположение на плоскости, если в некотором прямоугольном базисе она имеет уравнение

а)  $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0;$

б)  $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0;$

в)  $6x_1x_2 + 8x_2^2 - 12x_1 - 26x_2 + 11 = 0;$

г)  $7x_1^2 + 16x_1x_2 - 23x_2^2 - 14x_1 - 16x_2 - 218 = 0;$



- д)  $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 40x_1 + 30x_2 = 0$ ;  
 е)  $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$ ;  
 ж)  $7x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 + 28x_1 + 12x_2 + 28 = 0$ ;  
 з)  $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 + 20x_2 + 20 = 0$ ;  
 и)  $9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 24x_1 - 16x_2 + 3 = 0$ ;  
 к)  $16x_1^2 - 24x_1x_2 + 5x_2^2 - 160x_1 + 120x_2 + 425 = 0$ .

4. При каком  $\alpha$  уравнение

$$x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 + \alpha = 0$$

изображает пару действительных пересекающихся прямых?

5. При каком  $\alpha$  уравнение

$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + \alpha = 0$$

изображает мнимый эллипс?

6. При каких  $\alpha$  и  $\beta$  уравнение

$$2x_1^2 + \alpha x_1x_2 + 2x_2^2 - 7x_1 + \beta x_2 + 3 = 0$$

изображает пару параллельных прямых?

7. Определить вид поверхности второго порядка и ее расположение, если в некотором прямоугольном базисе она имеет уравнение

- а)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 1 = 0$ ;  
 б)  $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 10x_1 + 8x_2 + 14x_3 - 6 = 0$ ;  
 в)  $2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 - 20x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3 - 24x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 18 = 0$ ;  
 г)  $3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 12x_2x_3 + 18x_1 - 4x_2 - 14x_3 = 0$ ;  
 д)  $4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2 = 0$ ;  
 е)  $x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8 = 0$ ;  
 ж)  $4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$ ;  
 з)  $x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3 = 0$ ;  
 и)  $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 12x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0$ ;  
 к)  $7x_1^2 - 7x_2^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 = 0$ ;  
 л)  $5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$ ;  
 м)  $36x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 36x_1x_2 + 24x_1x_3 + 12x_2x_3 - 49 = 0$ ;  
 н)  $36x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 36x_1x_2 + 24x_1x_3 + 12x_2x_3 = 0$ ;  
 о)  $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1 - 6x_2 - 8x_3 + 21 = 0$ ;  
 п)  $2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2 = 0$ ;  
 р)  $3x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1 + 4x_2 - 1 = 0$ ;  
 с)  $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16 = 0$ .

8. Найти плоскости симметрии поверхностей:

- а)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - x_1 + 4x_2 - x_3 + 2 = 0$ ;

б)  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$ ;

в)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 1 = 0$ .

9. При каких  $\alpha$  и  $\beta$  уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2\alpha x_1x_3 + 2\beta x_2x_3 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$$

является уравнением конуса?

10. Найти (с помощью инвариантов) необходимое и достаточное условие для того, чтобы общее уравнение поверхности второго порядка определяло бы

а) круглый цилиндр;

б) круглый конус;

в) сферу;

г) параболоид вращения;

д) две перпендикулярные плоскости.

11. Выразить через инварианты объем эллипсоида, заданного общим уравнением.

12. Уравнение второй степени определяет пару пересекающихся плоскостей. Выразить через его инварианты тангенс угла между этими плоскостями.

13. Уравнение второй степени определяет пару параллельных плоскостей. Выразить через его инварианты расстояние между этими плоскостями.

14. При каких  $\alpha$  и  $\beta$  уравнение

$$x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + (\alpha x_1 + \beta x_2)^2 - 1 = 0$$

является уравнением цилиндра вращения?

15. При каком  $\alpha$  конус

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + \alpha x_3^2 = 0$$

будет конусом вращения? Найти ось вращения.

## ГЛАВА VI

### ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ

#### § 1. Тензор инерции

1. Рассмотрим движение твердого тела ( $\mathcal{K}$ ), закрепленного в одной точке, которую мы обозначим буквой  $O$  и примем за начало координат. В каждый момент времени движение этого тела можно рассматривать как вращение с угловой скоростью  $\omega$  вокруг некоторой оси, проходящей через точку  $O$ . Линейная скорость точки  $M$  этого тела, определяемой радиусом-вектором  $\overline{OM} = \mathbf{x}$ , как известно из механики, будет вычисляться по формуле

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{x}.$$

Найдем кинетическую энергию рассматриваемого тела. Для этого выделим элемент тела в окрестности точки  $M$ . Кинетическая энергия этого элемента будет равна

$$dT = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 dm.$$

Поэтому кинетическая энергия всего тела может быть найдена в виде

$$T = \frac{1}{2} \int_{(\mathcal{K})} \mathbf{v}^2 dm,$$

или в виде

$$T = \frac{1}{2} \int_{(\mathcal{K})} (\omega \times \mathbf{x})^2 dm, \quad (1)$$

где интегрирование ведется по всему телу ( $\mathcal{K}$ ) (если тело трехмерное, то интеграл будет тройным; если тело представ-

ляет собой кусок поверхности, то интегрирование будет вестись по этой поверхности; если тело представляет собой некоторую линию, то интеграл будет криволинейным, и, наконец, если тело состоит из конечного числа точечных масс, интеграл превратится в простую сумму).

Преобразуем теперь подынтегральное выражение. Имеем (упр. 7 на стр. 30)

$$(\omega \times x)^2 = \omega^2 x^2 - (\omega x)^2.$$

Пусть  $\{e_1, e_2, e_3\}$  — неподвижный базис с началом в точке  $O$ . Запишем разложения векторов  $\omega$  и  $x$  по этому базису в виде

$$\omega = \omega_i e_i, \quad x = x_i e_i.$$

Тогда выражения  $\omega^2$ ,  $x^2$  и  $\omega x$  могут быть записаны так:

$$\omega^2 = \delta_{ij} \omega_i \omega_j, \quad x^2 = \delta_{kl} x_k x_l,$$

$$\omega x = \delta_{ik} \omega_i x_k = \delta_{jl} \omega_j x_l.$$

Поэтому выражение для  $(\omega \times x)^2$  принимает вид

$$\begin{aligned} (\omega \times x)^2 &= (\delta_{ij} \omega_i \omega_j) (\delta_{kl} x_k x_l) - (\delta_{ik} \omega_i x_k) (\delta_{jl} \omega_j x_l) = \\ &= (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \omega_i \omega_j x_k x_l. \end{aligned}$$

Подставим это выражение в интеграл (1). Здесь переменными интегрирования являются координаты  $x_k$  вектора  $x$ , а координаты вектора  $\omega$  следует считать постоянными. Поэтому их можно вынести из-под знака интеграла и записать равенство (1) следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \omega_i \omega_j \int_{(\mathcal{M})} x_k x_l dm.$$

Это выражение не зависит от координат вектора  $x$ , так как по ним производится интегрирование, а зависит только от координат вектора  $\omega$ . Кинетическая энергия  $T$  представляет собой квадратичную форму относительно координат этого вектора. Ее коэффициенты образуют симметричный тензор второй валентности. Этот тензор, умноженный на два, называют *тензором инерции* тела  $(\mathcal{H})$ . Если обозначить компоненты тензора инерции через  $I_{ij}$ , то получим для них

следующее выражение:

$$I_{ij} = (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \int_{(\mathcal{H})} x_k x_l dm. \quad (2)$$

Кинетическая энергия вращающегося тела запишется теперь в виде

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j, \quad (3)$$

или в виде

$$T = \frac{1}{2} \omega I \omega,$$

где через  $I$  обозначен симметричный линейный оператор, порожденный тензором  $I_{ij}$ .

Простой подсчет показывает, что формулы (2) для вычисления компонент тензора инерции  $I_{ij}$  могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{(\mathcal{H})} (x_2^2 + x_3^2) dm, & I_{23} &= I_{32} = - \int_{(\mathcal{H})} x_2 x_3 dm, \\ I_{22} &= \int_{(\mathcal{H})} (x_1^2 + x_3^2) dm, & I_{31} &= I_{13} = - \int_{(\mathcal{H})} x_1 x_3 dm, \\ I_{33} &= \int_{(\mathcal{H})} (x_1^2 + x_2^2) dm, & I_{12} &= I_{21} = - \int_{(\mathcal{H})} x_1 x_2 dm. \end{aligned}$$

Величины  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  являются *моментами инерции* тела  $(\mathcal{H})$  относительно осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ . Величины  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$  носят название *полярных моментов инерции*.

2. Найдем величину момента инерции тела относительно любой оси, проходящей через точку  $O$ . Рассмотрим ось, проходящую через точку  $O$ , определяемую единичным вектором  $\mathbf{p}$  (рис. 13). Пусть снова  $M$  — произвольная точка тела  $(\mathcal{H})$ , определяемая радиусом-вектором  $\mathbf{x} = \overline{OM}$ , и  $dm$  — элемент массы, сосредоточенной в окрестности точки  $M$ . Момент инерции этого элемента относительно оси  $O\mathbf{p}$  будет равен

$$dl = \rho^2 dm,$$

где  $\rho$  — расстояние от точки  $M$  до оси  $Op$ . Но, как известно (см. упр. 12 на стр. 50), это расстояние может быть вычислено по формуле

$$\rho = \frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{x}|}{|\mathbf{p}|}$$

или, так как  $|\mathbf{p}| = 1$ , по формуле

$$\rho = |\mathbf{p} \times \mathbf{x}|.$$

Следовательно,

$$dI = (\mathbf{p} \times \mathbf{x})^2 dm,$$

и момент инерции тела  $(\mathcal{K})$  относительно оси  $Op$  определится так:

$$I = \int_{(\mathcal{K})} (\mathbf{p} \times \mathbf{x})^2 dm. \quad (4)$$

Сравним полученное выражение для момента инерции  $I$  с формулой (1) для кинетической энергии  $T$  тела  $(\mathcal{K})$ . Это выражение для  $I$  получается из формулы (1) отбрасыванием множителя  $\frac{1}{2}$  и заменой вектора  $\boldsymbol{\omega}$  на вектор  $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ . Поэтому и окончательное выражение для момента инерции  $I$  получится из выражения (3) для кинетической энергии  $T$  путем такой же замены и будет иметь вид

$$I = I_{ij} p_i p_j. \quad (5)$$

Эта формула показывает, что *момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через точку  $O$ , определяется только при помощи тензора инерции этого тела.*

3. Как и всякий симметричный тензор второй валентности, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем ортогонального преобразования базиса. Оси  $Ox_i^0$ , определяемые точкой  $O$  и собственными векторами  $\mathbf{e}_i^0$  тензора инерции, называются *главными осями инерции* тела  $(\mathcal{K})$ .

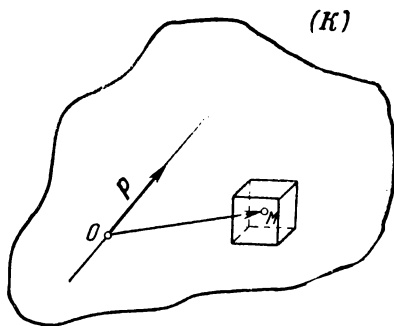


Рис. 13.

Собственные значения  $I_i$  тензора инерции являются моментами инерции тела ( $\mathcal{X}$ ) относительно главных осей инерции. Поэтому они удовлетворяют условию  $I_i > 0$ . Они называются *главными моментами инерции*.

Полярные моменты инерции  $I_{ij}$  ( $i \neq j$ ) тела ( $\mathcal{X}$ ), вычисленные в базисе  $\{e_i^0\}$ , будут равны нулю. Поэтому выражение для кинетической энергии тела ( $\mathcal{X}$ ) примет в этом базисе вид

$$T = \frac{1}{2} [I_1 (\omega_1^0)^2 + I_2 (\omega_2^0)^2 + I_3 (\omega_3^0)^2];$$

здесь  $\omega_i^0$  — координаты вектора  $\omega$  относительно базиса  $\{e_i^0\}$ . Так как  $I_i > 0$ , то эта квадратичная форма является положительно определенной.

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называется *асимметричным волчком*. Если два главных момента инерции тела равны между собой, но не равны третьему, то тело называется *симметричным волчком*. При  $I_1 = I_2 \neq I_3$  любая ось, проходящая через точку  $O$  и лежащая в плоскости векторов  $e_1^0, e_2^0$ , будет главной осью инерции. Если, наконец, все главные моменты инерции тела равны между собой, то тело называется *шаровым волчком*. В этом случае любая ось, проходящая через точку  $O$ , будет главной осью инерции тела.

Рассмотрим характеристическую поверхность второго порядка, определяемую тензором инерции  $I_{ij}$ . Ее уравнение записывается в виде

$$x I x = 1$$

или, в координатной форме, в виде,

$$I_{ij} x_i x_j = 1.$$

Так как собственные значения тензора  $I_{ij}$  положительны, то эта поверхность является эллипсоидом и называется *эллипсоидом инерции* данного тела. Оси симметрии этого эллипсоида совпадают с главными осями инерции тела ( $\mathcal{X}$ ). Эллипсоид инерции позволяет геометрически найти величину момента инерции относительно произвольной оси, проходящей через точку  $O$ .

Действительно, если  $x = \overline{OM}$  — радиус-вектор точки  $M$  эллипсоида инерции, имеющей направление вектора  $p$ , то

$$x = x p,$$

где  $x = |\mathbf{x}|$ , и

$$x_i = xp_i.$$

Поэтому

$$I = I_{ij}p_i p_j = \frac{I_{ij}x_i x_j}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2},$$

так как  $I_{ij}x_i x_j = 1$  (ср. стр. 80). Таким образом, *момент инерции  $I$  относительно оси  $Op$  равен единице, деленной на квадрат расстояния от точки  $O$  до той точки  $M$  эллипсоида инерции, в которой ее пересекает прямая  $p$ .*

4. Предположим, что точка  $O$  является центром инерции (центром массы) тела  $(\mathcal{H})$ , и найдем, как изменится тензор инерции тела при переходе от точки  $O$  к некоторой другой точке  $O'$ , определяемой радиусом-вектором  $\overline{OO'} = \mathbf{a}$ . Пусть  $M$  — произвольная точка тела и  $\overline{OM} = \mathbf{x}$ ,  $\overline{O'M} = \mathbf{x}'$ . Тогда

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$$

и момент инерции тела  $(\mathcal{H})$  относительно оси  $O'p$ , проходящей через точку  $O'$ , направление которой задается единичным вектором  $p$ , определится по формуле, аналогичной формуле (4):

$$I' = \int_{(\mathcal{H})} (\mathbf{p} \times \mathbf{x}')^2 dm = \int_{(\mathcal{H})} [\mathbf{p} \times (\mathbf{x} - \mathbf{a})]^2 dm.$$

Это выражение может быть переписано в виде

$$I' = \int_{(\mathcal{H})} (\mathbf{p} \times \mathbf{x})^2 dm - 2(\mathbf{p} \times \mathbf{a}) \left( \mathbf{p} \times \int_{(\mathcal{H})} \mathbf{x} dm \right) + + (\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2 \int_{(\mathcal{H})} dm$$

(здесь используется то, что при интегрировании векторных выражений остаются справедливыми хорошо известные из анализа свойства определенного интеграла). Но так как  $O$  — центр инерции тела, то

$$\int_{(\mathcal{H})} \mathbf{x} dm = 0$$

и, кроме того,

$$\int_{(\mathcal{H})} dm = m,$$



где через  $m$  обозначена масса тела ( $\mathcal{X}$ ). Поэтому выражение для  $I'$  принимает вид

$$I' = \int_{(\mathcal{X})} (\mathbf{p} \times \mathbf{x})^2 dm + m(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2$$

или

$$I' = I + m(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2.$$

Так как выражение  $(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2$  равно квадрату расстояния от точки  $O$  до оси  $Op$ , то это равенство выражает известную теорему Штейнера о том, что *момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции тела, увеличенному на произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Пусть  $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ . Тогда  $(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2$  может быть преобразовано так:

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2 = a^2 p^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})^2 = (a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) p_i p_j.$$

Теперь, используя формулу (5), получим для момента инерции  $I'$  выражение

$$I' = [I_{ij} + m(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j)] p_i p_j.$$

Отсюда ясно, что при переходе от точки  $O$  к точке  $O'$  тензор инерции преобразуется следующим образом:

$$I'_{ij} = I_{ij} + m(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j).$$

Отнесем тензор  $I_{ij}$  к главным осям инерции. Тогда его матрица будет иметь вид

$$(I_{ij}) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора инерции  $I'_{ij}$  в этом случае будут:

$$\begin{aligned} I'_{11} &= I_1 + m(a_2^2 + a_3^2), \\ I'_{22} &= I_2 + m(a_1^2 + a_3^2), \\ I'_{33} &= I_3 + m(a_1^2 + a_2^2), \\ I'_{ij} &= -ma_i a_j \quad \text{при } i \neq j. \end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что главные оси тензора  $I_{ij}$ , вообще говоря, не совпадают с главными осями тензора  $I'_{ij}$ . Легко видеть, что *главные оси обоих тензоров совпадают тогда и только тогда, когда точка  $O'$  лежит на одной из главных осей инерции тензора  $I_{ij}$* . В самом деле, пусть, например, точка  $O'$  лежит на оси  $Oe_1^0$ . Тогда  $a = a_1 e_1^0$  и  $I'_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Обратно, если  $I'_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , то две из трех координат  $a_i$  должны быть равны нулю.

5. С тензором инерции тела связан его *момент импульса*. Пусть тело ( $\mathcal{H}$ ) вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, проходящей через его произвольную точку  $O$ . Элемент массы  $dm$  этого тела, сосредоточенный в окрестности точки  $M$ , движется с линейной скоростью  $v$  и несет импульс, равный  $v dm$ . Момент этого импульса относительно точки  $O$  равен векторному произведению радиуса-вектора  $\overline{OM} = x$  точки  $M$  на этот импульс:

$$dM = (x \times v) dm.$$

А полный момент импульса тела ( $\mathcal{H}$ ) относительно точки  $M$  находится интегрированием:

$$M = \int_{(\mathcal{H})} (x \times v) dm.$$

Но

$$v = \omega \times x.$$

Поэтому

$$M = \int_{(\mathcal{H})} [x \times (\omega \times x)] dm. \quad (6)$$

Это выражение показывает, что момент импульса  $M$  линейно зависит от вектора угловой скорости  $\omega$ . Следовательно, векторы  $\omega$  и  $M$  связаны некоторым линейным преобразованием. Покажем, что матрица этого линейного преобразования совпадает с тензором инерции тела ( $\mathcal{H}$ ).

Для этого преобразуем подынтегральное выражение предыдущего интеграла, пользуясь выведенной ранее формулой для двойного векторного произведения (гл. 1, стр. 29):

$$x \times (\omega \times x) = \omega x^2 - x(\omega x).$$

Если  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$  и  $\boldsymbol{\omega} = \omega_i \mathbf{e}_i$ , то это равенство может быть записано в таком виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) &= (\delta_{ij} \omega_j \delta_{kl} x_k x_l - \delta_{ik} x_k \delta_{jl} \omega_j x_l) \mathbf{e}_i = \\ &= (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \omega_j x_k x_l \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Подставляя найденное выражение в интеграл (6), получим следующие формулы для вычисления координат  $M_i$  вектора  $\mathbf{M}$ :

$$M_i = (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \omega_j \int_{(\mathcal{V})} x_k x_l dm.$$

Сравнивая эти формулы с выражениями (2) для компонент тензора инерции, убеждаемся, что

$$M_i = I_{ij} \omega_j, \quad (7)$$

что и требовалось доказать. Формулы (7) могут быть переписаны в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega},$$

где  $\mathbf{I}$  — симметричный линейный оператор, соответствующий тензору  $I_{ij}$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти тензор инерции и эллипсоид инерции для следующих однородных сплошных тел, считая, что центр вращения совпадает с их центром инерции, а масса равна  $m$ :

- а) тонкого стержня длины  $l$ ;
- б) диска радиуса  $R$ ;
- в) прямоугольной пластинки со сторонами  $a$  и  $b$ ;
- г) шара радиуса  $R$ ;
- д) круглого цилиндра радиуса  $R$  и высоты  $h$ ;
- е) прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;
- ж) трехосного эллипсоида с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

2. Найти тензор инерции и эллипсоид инерции следующих тел, считая, что их масса равна  $m$ :

- а) прямого кругового конуса радиуса  $R$  и высоты  $h$ , если его центр вращения совпадает с вершиной;
- б) шара радиуса  $R$ , если его центр вращения лежит на поверхности шара;
- в) кругового цилиндра радиуса  $R$  и высоты  $h$ , если его центр вращения совпадает с центром основания.

3. Найти тензор и эллипсоид инерции для следующих молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга, причем их центр вращения предполагается совмещенным с центром инерции:

а) молекула состоит из  $n$  атомов массы  $m_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ), расположенных на одной прямой, так что расстояние между атомами  $\alpha$  и  $\beta$  равно  $l_{\alpha\beta}$ ;

б) молекула состоит из трех атомов, расположенных в виде равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC = a$  и высотой  $h$ ; атомы, расположенные в точках  $B$  и  $C$ , имеют массу  $m_1$ , а в точке  $A$  — массу  $m_2$ ;

в) молекула состоит из четырех атомов одинаковой массы  $m$ , расположенных в вершинах правильного тетраэдра с ребром  $a$ .

4. Найти кинетическую энергию и момент импульса однородного прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $a$ ,  $b$  и  $c$  и массой  $m$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг одной из своих диагоналей.

5. Найти кинетическую энергию и момент импульса однородного цилиндра радиуса  $R$ , высоты  $h$  и массы  $m$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг прямой, соединяющей его центр инерции с одной из точек окружности, по которой его боковая поверхность пересекается с основанием.

## § 2. Некоторые свойства кристаллов, связанные с тензорами второй валентности

1. Тензорное исчисление оказывается очень полезным при изучении свойств кристаллов. Это объясняется тем, что при описании многих явлений, таких, например, как электропроводность, теплопроводность, упругость, кристалл можно рассматривать как однородную сплошную среду, физические свойства которой во всех ее точках одинаковы. Физические свойства кристаллов определяют соотношения между физическими величинами, связанными с кристаллом или воздействующими на него. Естественно считать, что эти физические величины также являются однородными. Например, если изучают тепловые свойства кристалла, то считают, что температура (или градиент температуры) кристалла во всех его точках постоянна; при изучении его электрических свойств считают постоянной напряженность электрического поля; при изучении магнитных свойств — напряженность магнитного поля и т. д.

Различают два типа физических свойств кристалла. Физические свойства, относящиеся к первому типу, не зависят от направления в кристалле. К таким свойствам относятся, например, плотность и теплоемкость кристалла. В силу однородности кристалла эти свойства описываются постоянными скалярными величинами. Плотность, например, характеризует

связь между массой и объемом. И так как масса и объем не зависят от направления, то и плотность обладает этим свойством.

Физические свойства второго типа зависят от направления в кристалле. К таким свойствам относятся, например, удельная электропроводность, связывающая напряженность электрического поля и плотность тока в кристалле. Говорят, что кристалл анизотропен по отношению к таким свойствам. Эта анизотропность кристалла по отношению к некоторым его свойствам связана с особенностями его молекулярного строения.

Свойства кристалла, зависящие от направления, могут быть описаны тензорами, если физические величины, воздействующие на кристалл, считать малыми. Покажем это на примере удельной электропроводности кристалла. Пусть  $E$  — напряженность электрического тока и  $j$  — плотность тока в кристалле, постоянные во всех его точках. Тогда  $j$  является функцией от  $E$ :

$$j = f(E).$$

Если координаты векторов  $E$  и  $j$  по отношению к ортонормированному базису  $\{e_i\}$  обозначить через  $E_i$  и  $j_i$ , то это соотношение может быть переписано в виде

$$j_i = f_i(E_k),$$

где  $f_i$  — функции, зависящие от трех аргументов  $E_k$ , которые можно считать непрерывными и дифференцируемыми функциями. Последнее обстоятельство вытекает из физического смысла функций  $f_i$ . Дадим вектору  $E$  приращение  $\Delta E$ , одинаковое во всех точках кристалла, тогда вектор  $j$  получит приращение  $\Delta j$ , также одинаковое во всех точках кристалла. Поскольку функции  $f_i$  дифференцируемы, это приращение может быть записано в виде

$$\Delta j_i = \frac{\partial f_i}{\partial E_k} \Delta E_k + \alpha_{ik} \Delta E_k,$$

где величины  $\alpha_{ik}$  стремятся к нулю при  $\Delta E_k \rightarrow 0$ . Считая величины  $\Delta E_k$  малыми, можно второе слагаемое этой суммы отбросить и написать

$$\Delta j_i = \frac{\partial f_i}{\partial E_k} \Delta E_k.$$

Так как  $\Delta E_k$  и  $\Delta j_i$  — координаты векторов, то частные производные  $\frac{\partial f_i}{\partial E_k}$  представляют собой компоненты тензора второй валентности:

$$\frac{\partial f_i}{\partial E_k} = \sigma_{ik}.$$

Тензор  $\sigma_{ik}$  называют *тензором удельной электропроводности*. Таким образом,

$$\Delta j_i = \sigma_{ik} \Delta E_k. \quad (1)$$

При этом значения компонент тензора  $\sigma_{ik}$  зависят от исходного значения вектора напряженности,  $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(E)$ . Полагая  $\sigma_{ik}^0 = \sigma_{ik}(0)$ , можно записать предыдущее соотношение в виде

$$j_i = \sigma_{ik}^0 E_k,$$

где теперь уже сами векторы  $j$  и  $E$  считаются достаточно малыми.

Если обозначить через  $\sigma$  линейное преобразование, соответствующее тензору  $\sigma_{ik}$ , то соотношение (1) может быть переписано в виде

$$\Delta j = \sigma \Delta E,$$

где  $\sigma$  зависит от начального значения вектора напряженности  $E$ . В частности, полагая  $\sigma^0 = \sigma(0)$ , получим

$$j = \sigma^0 E$$

для малых  $E$  и  $j$ . Эти соотношения представляют собой обобщенный закон Ома.

В некоторых случаях зависимость между физическими величинами оказывается линейной не только для малых, но и для любых их значений. Такие зависимости описываются тензорами, не зависящими от начальных значений этих величин.

Но может оказаться, что некоторое свойство кристалла, которое, вообще говоря, является свойством второго типа, для некоторого конкретного кристалла будет одинаковым во всех его направлениях. Такой кристалл называют *изотропным* по отношению к этому свойству. Например, если кристалл обладает одинаковой электропроводностью во

всех направлениях, то говорят, что он изотропен по отношению к этому свойству. Закон Ома в этом случае принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

и тензор удельной электропроводности становится шаровым тензором:

$$\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}.$$

Скаляр  $\sigma$  будет *удельной электропроводностью* кристалла, одинаковой во всех направлениях.

2. Рассмотрим еще одно свойство кристаллов, по отношению к которому они могут быть анизотропными, а именно рассмотрим теплопроводность кристалла. Обозначим через  $\mathbf{h}$  вектор потока тепла, равный количеству тепла, протекающему через единичную площадку, перпендикулярную этому вектору, в единицу времени. Если кристалл изотропен по отношению к теплопроводности, то

$$\mathbf{h} = -k \operatorname{grad} T,$$

где вектор  $\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$  показывает скорость изменения температуры в кристалле. Этот вектор будем считать одинаковым во всех точках кристалла. Коэффициент  $k$  называется *коэффициентом теплопроводности* кристалла.

Если кристалл анизотропен по отношению к теплопроводности, то вектор  $\mathbf{h}$ , вообще говоря, не будет параллелен вектору  $\operatorname{grad} T$ . Обозначая его координаты через  $h_i$ , запишем зависимость между этими векторами (для малых значений  $\operatorname{grad} T$ ) в виде

$$h_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (2)$$

где  $k_{ij}$  — *тензор теплопроводности кристалла*. Экспериментальное исследование показывает, что тензор  $k_{ij}$  является симметричным тензором:  $k_{ij} = k_{ji}$ . Из физических соображений ясно, что  $k_{ij}$  — невырожденный тензор (вырождение этого тензора означало бы, что по некоторому направлению кристалл вовсе не проводит тепла). Тензор  $r_{ij}$ , обратный тензору  $k_{ij}$ , называют *тензором теплового сопротивления*. Разрешив уравнения (2) относительно компонент  $\operatorname{grad} T$ ,

получим

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -r_{ij} h_j.$$

Из симметрии тензора  $k_{ij}$  следует симметрия тензора  $r_{ij}$ .

Тензор  $k_{ij}$ , как всякий симметричный тензор, может быть приведен ортогональным преобразованием к диагональному виду:

$$(k_{ij}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения  $k_i$  этого тензора называются *главными коэффициентами теплопроводности* кристалла, а его собственные направления  $e_i^0$  — *главными направлениями тензора теплопроводности*. Из физических соображений ясно, что  $k_i > 0$ . Одновременно с тензором  $k_{ij}$  к диагональному виду приведетс я и тензор  $r_{ij}$ , и его собственные значения  $r_i$  связаны с главными коэффициентами теплопроводности  $k_i$  соотношениями (упр. 8, стр. 144)

$$r_i = \frac{1}{k_i}.$$

Уравнение характеристической поверхности тензора  $k_{ij}$  записывается в виде

$$k_{ij} x_i x_j = 1,$$

а после приведения к главным осям — в виде

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 = 1.$$

Так как  $k_i > 0$ , то эта поверхность является трехосным эллипсоидом, который называется *эллипсоидом теплопроводности кристалла*.

Рассмотрим несколько задач, связанных с распространением тепла в кристаллах.

а) Пусть поверхности плоскопараллельной кристаллической пластинки находятся в контакте с двумя хорошими проводниками тепла, имеющими разную температуру (рис. 14).

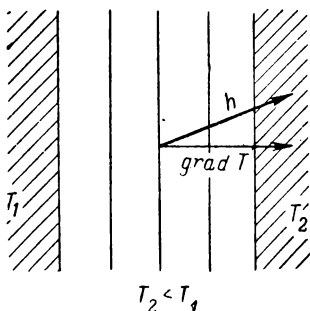


Рис. 14.



Предположим, что длина и ширина пластинки значительно больше ее толщины. Тогда поверхности уровня температуры  $T$  пластинки будут параллельны ее граничным плоскостям, а вектор  $\text{grad } T$  будет направлен перпендикулярно им. Если вектор  $\mathbf{e}_1$  направить перпендикулярно поверхности пластинки, а векторы  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  — параллельно ей, то

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \mathbf{e}_1.$$

Вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  определится так:

$$\mathbf{h} = -(k_{11}\mathbf{e}_1 + k_{21}\mathbf{e}_2 + k_{31}\mathbf{e}_3) \frac{\partial T}{\partial x_1}.$$

б) Рассмотрим теперь распространение тепла вдоль длинного стержня. В этом случае вектор потока тепла должен быть направлен вдоль оси стержня. Следовательно, изотермические плоскости будут наклонены к оси стержня. Так как теперь  $\mathbf{h} = h_1 \mathbf{e}_1$ , то вектор  $\text{grad } T$  может быть вычислен по формуле

$$\text{grad } T = -(r_{11}\mathbf{e}_1 + r_{21}\mathbf{e}_2 + r_{31}\mathbf{e}_3) h_1.$$

в) Рассмотрим в заключение задачу о распространении тепла, создаваемого точечным источником в бесконечно большом кристалле. Здесь нам придется отступить от предположения об однородности физической величины, действующей на кристалл, так как в рассматриваемом случае поле градиента температуры не будет однородным. Уравнение теплопроводности в кристалле, имеющем плотность  $\rho$  и удельную теплоемкость  $c$ , имеет вид (см. [7], стр. 794)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div } \mathbf{h}.$$

Мы рассматриваем случай установившегося распределения температуры, в силу чего  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ . Тогда уравнение теплопроводности примет вид

$$\text{div } \mathbf{h} = 0$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} = 0.$$

Но в анизотропном кристалле вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  связан с градиентом температуры  $T$  уравнениями (2). Подставляя выражения для компонент вектора  $\mathbf{h}$  в последнее уравнение, получим

$$k_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (3)$$

так как компоненты тензора  $k_{ij}$  можно считать постоянными.

Чтобы решить уравнение (3), перейдем к той системе координат, в которой тензор  $k_{ij}$  приводится к диагональному виду. В этом случае уравнение (3) запишется так:

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = 0.$$

Сделаем в этом уравнении замену переменных, полагая

$$\xi_i = \frac{x_i}{\sqrt{k_i}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i} &= \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \frac{1}{\sqrt{k_i}}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_i^2} \frac{1}{k_i} \end{aligned}$$

(где по индексу  $i$  суммирование нет) и уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_3^2} = 0.$$

Это уравнение представляет собой уравнение Лапласа, и его решение при наличии единственного точечного источника тепла, расположенного в начале координат, записывается так (см. [1], стр. 232):

$$T = \frac{A}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} + T_\infty,$$

где  $T_\infty$  — постоянная температура вдали от источника. Константа  $A$  связана с производительностью источника тепла. Если перейти обратно к переменным  $x_i$ , то это выражение может быть записано следующим образом:

$$T = \frac{A}{\sqrt{\frac{x_1^2}{k_1} + \frac{x_2^2}{k_2} + \frac{x_3^2}{k_3}}} + T_\infty.$$

Так как  $\frac{1}{k_i} = r_i$ , то

$$T = \frac{A}{\sqrt{r_1 x_1^2 + r_2 x_2^2 + r_3 x_3^2}} + T_\infty$$

или, если перейти к произвольной системе координат,

$$T = \frac{A}{\sqrt{r_{ij} x_i x_j}} + T_\infty.$$

Отсюда ясно, что изотермические поверхности в кристалле определяются уравнением

$$r_{ij} x_i x_j = \left( \frac{T - T_\infty}{A} \right)^2 = \text{const.}$$

Эти поверхности будут эллипсоидами, подобными характеристическому эллипсоиду тензора теплового сопротивления. Вектор  $\mathbf{h}$  будет направлен из точки  $O$  в точку  $M$  изотермической поверхности, а вектор  $\text{grad } T$  будет ортогонален ей в этой точке.

3. Рассмотрим еще один эффект, который описывается тензором второй валентности, — электрическую поляризацию кристалла. Если кристалл диэлектрика находится в однородном электрическом поле напряженности  $\mathbf{E}$ , его молекулы, представляющие собой диполи, стремятся повернуться определенным образом по отношению к направлению вектора  $\mathbf{E}$ . Электрический момент единицы объема такого кристалла называется *поляризацией* диэлектрика и обозначается буквой  $\mathbf{P}$ . Если диэлектрик изотропен, то вектор  $\mathbf{P}$  имеет то же направление, что и вектор  $\mathbf{E}$ , и уравнение, связывающее эти два вектора, имеет вид

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E},$$

где  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий *поляризуемость* диэлектрика. Если диэлектрик анизотропен, то уравнение, связывающее векторы  $\mathbf{E} = E_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{P} = p_i \mathbf{e}_i$ , записывается в виде

$$p_i = \alpha_{ij} E_j,$$

где  $\alpha_{ij}$  — *тензор поляризуемости* диэлектрика.

Наряду с вектором поляризации  $\mathbf{P}$  диэлектрика рассматривают *вектор его электрической индукции*, который

определяется формулой (см. [17], стр. 108)

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}.$$

Если обозначить координаты вектора  $\mathbf{D}$  через  $D_i$ , то мы получим для них выражение

$$D_i = (\delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}) E_j.$$

Тензор  $\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}$  называется *тензором диэлектрической проницаемости* диэлектрика. Можно доказать, что тензор  $\alpha_{ij}$ , как и тензор  $\epsilon_{ij}$ , является симметричным тензором. Главные значения тензора  $\epsilon_{ij}$  называются *главными диэлектрическими проницаемостями кристалла*.

Совершенно аналогично описывается магнитная восприимчивость в пара- и диамагнитных кристаллах. Если кристалл помещен в однородное магнитное поле, напряженность которого равна  $\mathbf{H}$ , то он намагничивается. Интенсивность его намагничивания характеризуется вектором  $\mathbf{I}$ , который равен средней плотности магнитного момента молекулярных токов. Для изотропной парамагнитной и диамагнитной среды имеет место соотношение

$$\mathbf{I} = \chi \mathbf{H},$$

где  $\chi$  — *коэффициент магнитной восприимчивости*. Для парамагнитных кристаллов  $\chi > 0$ , а для диамагнитных  $\chi < 0$ . Если кристалл анизотропен, то соотношение между векторами  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{I}$  описывается симметричным тензором  $\chi_{ij}$ , который называется *тензором магнитной восприимчивости*. Если  $\mathbf{H} = H_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{I} = I_k \mathbf{e}_k$ , то это соотношение принимает вид

$$I_k = \chi_{ki} H_i.$$

Наряду с вектором  $\mathbf{I}$  при изучении явлений магнетизма рассматривается вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , определяемый формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}.$$

Координаты  $B_i$  этого вектора связаны с координатами  $H_j$  вектора  $\mathbf{H}$  соотношениями

$$B_i = (\delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}) H_j.$$

Тензор  $\mu_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}$  носит название *тензора магнитной проницаемости*. Этот тензор также симметричен. Его главные значения  $\mu_i$  называются *главными коэффициентами*

*магнитной проницаемости.* Если  $\mu_i > 1$ , то кристалл парамагнитен в соответствующем главном направлении; если  $\mu_i < 1$ , то он диамагнитен в этом направлении.

4. Одним из основных свойств кристаллов является наличие у них определенной симметрии. Кристалл оказывается инвариантным относительно конечного числа ортогональных точечных преобразований, образующих группу. Она называется *группой точечных преобразований кристалла*. По наличию тех или иных видов симметрии кристаллы разделяются на 32 кристаллографических класса, описание которых можно найти, например, в книге [13] (стр. 216).

Все физические свойства кристаллов оказываются связанными с их симметрией. А именно, *элементы симметрии любого физического свойства кристалла должны включать элементы симметрии его точечной группы преобразований.* Это утверждение носит название принципа Неймана и играет важную роль в кристаллофизике.

Рассмотрим, как связаны с симметрией кристалла свойства, описываемые симметричными тензорами второй валентности. Напомним сначала, что *осью симметрии кристалла порядка  $n$*  называется прямая  $l$ , поворот вокруг которой на угол  $\frac{2\pi}{n}$  совмещает кристалл с его первоначальным положением. Пусть  $a_{ij}$  — симметричный тензор, описывающий некоторое свойство кристалла, и  $a_{ij}x_ix_j = 1$  — его характеристическая поверхность. Если кристалл имеет ось симметрии порядка  $n$ , то эта ось, согласно принципу Неймана, должна являться осью симметрии такого же порядка и для характеристической поверхности тензора  $a_{ij}$ . Если прямая  $l$  является осью симметрии второго порядка, то одна из главных осей характеристической поверхности тензора  $a_{ij}$  должна совпадать с прямой  $l$ . Если же прямая  $l$  является осью симметрии порядка  $n > 2$ , то она должна являться осью вращения для характеристической поверхности, так как поверхность второго порядка, не являющаяся поверхностью вращения, не может иметь осей симметрии порядка выше второго. Следовательно, при  $n > 2$  характеристическая поверхность является поверхностью вращения, а сам этот тензор имеет два одинаковых собственных значения.

Упомянутые выше кристаллографические классы объединяются в системы по количеству и характеру имеющих

в кристалле осей симметрии. Различают семь кристаллографических систем: *кубическую, тригональную, тетрагональную, гексагональную, ромбическую, моноклинную и триклинную*. Посмотрим, какие особенности будет иметь форма и расположение характеристической поверхности симметричного тензора  $a_{ij}$  для каждой из этих кристаллографических систем.

Кристаллы кубической системы имеют три оси четвертого порядка. Характеристическая поверхность тензора  $a_{ij}$  для таких кристаллов должна иметь три оси вращения. Но таким свойством обладает только сфера. Поэтому тензор  $a_{ij}$  для кристаллов кубической системы лишь множителем отличается от единичного тензора. А это означает, что такие кристаллы изотропны по отношению к свойствам, описываемым симметричными тензорами второй валентности.

Кристаллы тригональной, тетрагональной и гексагональной систем имеют по одной оси соответственно третьего, четвертого и шестого порядка. Для таких кристаллов характеристическая поверхность тензора  $a_{ij}$  является поверхностью вращения, ось которой параллельна оси кристалла. Тензор  $a_{ij}$  имеет два одинаковых собственных значения.

Кристаллы ромбической системы имеют три взаимно перпендикулярные оси второго порядка. Характеристическая поверхность тензора  $a_{ij}$  может быть произвольной поверхностью второго порядка, главные оси которой параллельны осям кристалла. Тензор  $a_{ij}$  может иметь три различных собственных значения.

Кристаллы моноклинной системы имеют одну ось второго порядка. Характеристическая поверхность тензора  $a_{ij}$  в таком кристалле может иметь произвольную форму, но одна из ее осей должна быть параллельна оси кристалла.

Наконец, кристаллы триклинной системы не имеют осей симметрии. В таком кристалле характеристическая поверхность может иметь любую форму и любое расположение.

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Тензор удельной электропроводности  $\sigma_{ij}$  некоторого кристалла в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  имеет следующие компоненты:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot 10^7$$

(электропроводность выражена в системе СИ и имеет размерность  $ом^{-1}м^{-1}$ ).

а) Найти главные направления  $e_1^0, e_2^0, e_3^0$  тензора  $\sigma_{ij}$  и его главные коэффициенты электропроводности.

б) Написать уравнение характеристической поверхности тензора  $\sigma_{ij}$  в старой и новой системах координат.

в) Электрическое поле напряженности  $1$  в/м действует в направлении единичного вектора  $e = \frac{1}{2}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3$ . Найти плотность тока  $j$ , индуцируемого этим полем в кристалле.

Тензор  $\rho_{ij}$ , обратный тензору удельной электропроводности  $\sigma_{ij}$ , называется *тензором удельного электрического сопротивления*.

2. Записать зависимость между плотностью тока  $j$  и напряженностью электрического поля  $E$  при помощи тензора удельного электрического сопротивления  $\rho_{ij}$ .

3. Вычислить компоненты тензора  $\rho_{ij}$  для кристалла, тензор удельной электропроводности которого задан в задаче 1.

4. Главные коэффициенты теплопроводности кварца имеют следующие значения:  $k_1 = k_2 = 6,5$ ;  $k_3 = 11,3$  (в единицах системы СИ, имеющих размерность  $вт/(м \cdot град)$ ).

а) Найти уравнение характеристической поверхности тензора удельной теплопроводности для этого кристалла.

б) Найти уравнения изотермических поверхностей, если тепло в кристалле кварца распространяется от точечного источника.

5. Между пластинами плоского конденсатора находится диэлектрик. В системе координат, вектор  $e_1$  которой направлен перпендикулярно пластинам конденсатора, компоненты тензора  $\epsilon_{ij}$  диэлектрика имеют следующие значения:

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Напряженность электрического поля в конденсаторе направлена перпендикулярно пластинам и равна  $E = Ee_1$ . Требуется:

а) найти тензор  $\alpha_{ij}$  поляризуемости этого диэлектрика;

б) найти его поляризацию  $P$  и электрическую индукцию  $D$ ;

в) найти углы, которые образуют векторы  $P$  и  $D$  с вектором  $e_1$ , и их проекции на этот вектор;

г) найти главные направления тензора диэлектрической проницаемости и главные диэлектрические постоянные кристалла.

### § 3. Тензоры напряжений и деформации

1. Рассмотрим однородное тело, находящееся под воздействием внешних сил. На элемент объема этого тела действуют силы двух типов. К первому типу относятся силы, величина которых пропорциональна объему элемента. Такие силы назы-

ваются *объемными*. К ним, например, относятся сила тяжести, силы притяжения, центробежные силы и т. д. Ко второму типу относятся силы, действующие на поверхность элемента со стороны окружающих его частей тела и пропорциональные площади поверхности элемента. Такая сила, отнесенная к единице площади, называется *напряжением*. Мы будем рассматривать *однородное напряжение*, считая, что его действие на поверхность элемента определенной формы и ориентации не зависит от положения этого элемента в теле. Будем считать, кроме того, что тело под действием указанных выше сил находится в статическом равновесии.

Пусть  $M$  — произвольная точка рассматриваемого однородного тела и  $\Delta s$  — содержащий эту точку элемент плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M$ . Ориентация элемента  $\Delta s$  определяется единичным вектором  $\mathbf{n}$ , нормальным плоскости  $\pi$  (рис. 15).

Сила  $\Delta \mathbf{p}$ , действующая на элемент  $\Delta s$ , будет равна

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} \Delta s,$$

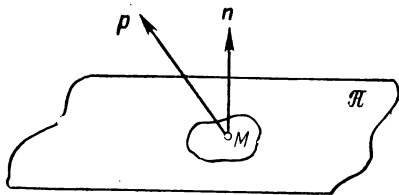


Рис. 15.

где  $\mathbf{p}$  — напряжение в точке  $M$ , соответствующее элементу  $\Delta s$ . Это напряжение будет зависеть от ориентации элемента  $\Delta s$ , т. е. от вектора  $\mathbf{n}$ , так что

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}).$$

Так как мы рассматриваем однородное напряжение, то эта функция будет *одинаковой во всех точках тела*.

Оказывается, эта функция  $\boldsymbol{\sigma}$  будет линейной вектор-функцией аргумента  $\mathbf{n}$ . Чтобы доказать это, заметим прежде всего, что так как напряжения на разных сторонах одной и той же площадки имеют одинаковую величину и противоположные направления, то функция  $\boldsymbol{\sigma}$  удовлетворяет условию  $\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{n}) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ .

Рассмотрим, далее, ортогональную систему координат с началом в точке  $M$  и базисными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Проведем плоскость  $\pi'$  параллельно плоскости  $\pi$ , так, чтобы она образовала вместе с координатными плоскостями тетраэдр  $MA_1A_2A_3$ .



(рис. 16). Рассмотрим, какие силы действуют на элемент объема нашего тела, заключенного внутри тетраэдра. На него, во-первых, действует объемная сила  $f \Delta v$ , где через  $f$  обозначена сила, отнесенная к единице объема. Затем на каждую из четырех граней тетраэдра действует сила со стороны окру-

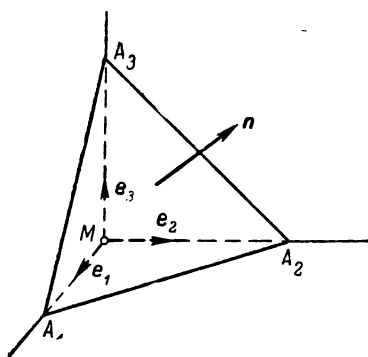


Рис. 16.

жающих частей тела. Если положить  $p_1 = \sigma(e_1)$ , то на грань  $MA_2A_3$  тетраэдра будет действовать сила  $-p_1 \Delta s_1$ , где через  $\Delta s_1$  обозначена площадь этой грани. Знак минус в этом выражении стоит потому, что внешняя нормаль к грани  $MA_2A_3$  тетраэдра совпадает с вектором  $-e_1$ . Точно так же силы, действующие на грани  $MA_3A_1$  и  $MA_1A_2$ , будут равны соответственно  $-p_2 \Delta s_2$  и  $-p_3 \Delta s_3$ , где  $p_2 = \sigma(e_2)$ ,  $p_3 = \sigma(e_3)$ , а  $\Delta s_2$  и

$\Delta s_3$  — площади этих граней. На грань  $A_1A_2A_3$  будет действовать сила  $p \Delta s$ , где  $p = \sigma(n)$  и  $\Delta s$  — площадь треугольника  $A_1A_2A_3$ . Так как рассматриваемый элемент объема находится в статическом равновесии, то имеет место равенство

$$f \Delta v - p_1 \Delta s_1 - p_2 \Delta s_2 - p_3 \Delta s_3 + p \Delta s = 0.$$

Первое слагаемое этой суммы имеет более высокий порядок малости, чем остальные. Поэтому им можно пренебречь и написать предыдущее равенство в виде

$$p \Delta s = p_1 \Delta s_1 + p_2 \Delta s_2 + p_3 \Delta s_3 = p_i \Delta s_i. \quad (1)$$

Но легко проверить, что

$$\frac{\Delta s_i}{\Delta s} = \cos \alpha_i,$$

где  $\alpha_i$  — угол, который нормаль  $n$  к плоскости  $\pi$  образует с вектором  $e_i$ . Так как вектор  $n = n_i e_i$  единичный, то  $n_i = \cos \alpha_i$ . Поэтому равенство (1) можно переписать так:

$$p = p_i n_i.$$

Запишем разложение векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_i$  по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{p}_j = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i.$$

Подставляя эти разложения в предыдущее равенство и приравнявая коэффициенты при линейно независимых векторах  $\mathbf{e}_i$ , получим

$$p_i = \sigma_{ij} n_j.$$

Это равенство доказывает наше утверждение: напряжение  $\mathbf{p}$  линейно зависит от нормали  $\mathbf{n}$  к элементу поверхности,

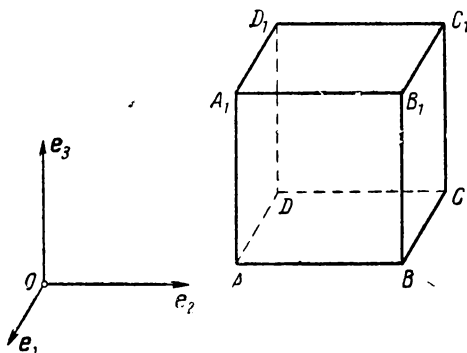


Рис. 17.

функция  $\sigma$  является линейной вектор-функцией, а матрица  $(\sigma_{ij})$  этой линейной вектор-функции образует тензор второй валентности, который называют *тензором напряжений*.

2. Докажем теперь, что тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  является симметричным тензором. Для этого выделим из нашего тела куб с ребром  $\Delta l$  и гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 17), и посмотрим, какие силы на него действуют. Обозначим через  $\Delta s$  площадь грани куба. Тогда на его грани  $ABB_1A_1$  и  $DCC_1D_1$  действуют силы  $\mathbf{p}_1 \Delta s$  и  $-\mathbf{p}_1 \Delta s$ , на грани  $BCC_1B_1$  и  $ADD_1A_1$  — силы  $\mathbf{p}_2 \Delta s$  и  $-\mathbf{p}_2 \Delta s$ , на грани  $A_1B_1C_1D_1$  и  $ABCD$  — силы  $\mathbf{p}_3 \Delta s$  и  $-\mathbf{p}_3 \Delta s$ . Эти силы можно считать приложенными в центрах граней. Подсчитаем момент этих сил относительно точки  $P$ , расположенной в центре куба. Легко видеть, что этот момент будет равен следующему выражению:

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_1 \Delta l \times \mathbf{p}_1 \Delta s + \mathbf{e}_2 \Delta l \times \mathbf{p}_2 \Delta s + \mathbf{e}_3 \Delta l \times \mathbf{p}_3 \Delta s.$$

Вычисляя входящие сюда векторные произведения по известным формулам (стр. 27), получим

$$\mathbf{M} = \varepsilon \{ (\sigma_{32} - \sigma_{23}) \mathbf{e}_1 + (\sigma_{13} - \sigma_{31}) \mathbf{e}_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12}) \mathbf{e}_3 \} \Delta v.$$

Но так как выделенный кубик находится в статическом равновесии, то  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ . Отсюда следует симметрия тензора  $\sigma_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Диагональные компоненты  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  тензора напряжений называются *нормальными компонентами*, так как определяемые ими составляющие векторов  $\mathbf{p}_i$  действуют перпендикулярно соответствующим координатным плоскостям. Положительное значение компоненты  $\sigma_{ii}$  характеризует растяжение, а отрицательное — сжатие тела. Компоненты  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$  называются *сдвиговыми компонентами* тензора напряжений, так как определяемые ими составляющие векторов  $\mathbf{p}_i$  действуют параллельно соответствующим координатным плоскостям.

Тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ , как всякий симметричный тензор, может быть приведен к диагональному виду

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

при помощи ортогонального преобразования. При этом сдвиговые компоненты тензора  $\sigma_{ij}$  обращаются в нуль, а нормальные компоненты совпадают с собственными значениями этого тензора. Их называют *главными напряжениями*, а соответствующие им собственные направления — *главными направлениями тензора напряжений*.

Уравнение характеристической поверхности тензора напряжений записывается в виде

$$\sigma_{ij} x_i x_j = 1.$$

Эта поверхность называется *поверхностью напряжений*. Если принять за базисные главные направления тензора  $\sigma_{ij}$ , то уравнение этой поверхности примет вид

$$\sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 = 1.$$

Так как числа  $\sigma_i$  могут быть как положительными, так и отрицательными, то эта поверхность может иметь любой из четырех видов, указанных в § 4 гл. III (стр. 107).

Отметим еще некоторые частные формы тензора напряжений. Будем считать при этом, что за базисные направления  $e_1, e_2, e_3$  приняты главные направления этого тензора.

а) *Линейное напряженное состояние (одноосное напряжение)* характеризуется тензором  $\sigma_{ij}$ , имеющим вид

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такое строение тензор напряжений имеет, например, в длинном однородном вертикальном стержне, к концу которого подвешен груз.

б) *Плоское напряженное состояние (двуосное напряжение)* характеризуется тензором  $\sigma_{ij}$  вида

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Частным случаем плоского напряженного состояния является чистый сдвиг, при котором тензор напряжений имеет вид

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Путем поворота базиса на  $45^\circ$  вокруг вектора  $e_3$  матрица чистого сдвига приводится к виду

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

в) *Объемное напряженное состояние (трехосное напряжение)* — наиболее общая система напряжений с тремя отличными от нуля главными напряжениями. Его частным случаем является гидростатическое сжатие, при котором тензор  $\sigma_{ij}$  является шаровым:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij},$$

где  $p$  — давление, постоянное в рассматриваемом объеме жидкости,

3. Предположим, что тело подвергается однородной малой деформации. В результате этой деформации точка  $M$  тела с радиусом-вектором  $x$  переходит в точку  $N$  с радиусом-вектором  $y$ , так что

$$y = x + u,$$

где вектор  $u$ , определяющий перемещение точки  $M$ , зависит от вектора  $x$ :  $u = u(x)$ . Рассмотрим, как деформируется при этом окрестность точки  $M$ . Пусть  $M_1$  — принадлежащая этой окрестности точка с радиусом-вектором  $x_1$  (рис. 18), так что

$$x_1 = x + \Delta x.$$

Она перейдет в точку  $N_1$  с радиусом-вектором

$$y_1 = x_1 + u_1,$$

где  $u_1 = u(x_1)$ . Если положить  $\Delta y = y_1 - y$ , то получим

$$\Delta y = \Delta x + \Delta u, \quad (2)$$

где

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x).$$

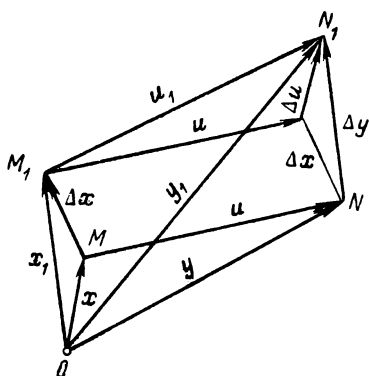


Рис. 18.

Вектор  $\Delta u$  определяет деформацию окрестности точки  $M$ . И так как эта деформация предполагается однородной, т. е. одинаковой во всех точках рассматриваемого тела, то вектор  $\Delta u$  не должен зависеть от вектора  $x$ , а будет зависеть только от вектора  $\Delta x$ :

$$\Delta u = f(\Delta x).$$

Покажем, что зависимость вектора  $\Delta u$  от вектора  $\Delta x$  является линейной зависимостью. Будем считать при этом, что функция  $f$  является непрерывной функцией аргумента  $\Delta x$ , — это согласуется с физическим смыслом функции  $f$ .

Итак, пусть  $M_1, M_2$  — две точки из окрестности точки  $M$ , определяемые радиусами-векторами  $x_1$  и  $x_2$ ,  $u_1 = u(x_1)$ ,  $u_2 = u(x_2)$ ,

$$\Delta x_1 = x_1 - x, \quad \Delta x_2 = x_2 - x,$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u, \quad \Delta u_2 = u_2 - u.$$

Тогда

$$u_1 - u = f(x_1 - x), \quad u_2 - u_1 = f(x_2 - x_1).$$

Складывая эти равенства, получим

$$u_2 - u = f(x_1 - x) + f(x_2 - x_1).$$

Но  $u_2 - u = f(x_2 - x) = f(\Delta x_1 + \Delta x_2)$ . Поэтому предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$f(\Delta x_1 + \Delta x_2) = f(\Delta x_1) + f(\Delta x_2),$$

что совпадает с первым условием, которому удовлетворяет линейная вектор-функция.

Для доказательства выполнения второго ее свойства заметим, что из предыдущего равенства следует, что

$$f(n \Delta x) = n f(\Delta x)$$

при целом  $n$ . Далее, если  $m$  — целое, то

$$f(\Delta x) = f\left(m \frac{\Delta x}{m}\right) = m f\left(\frac{\Delta x}{m}\right),$$

откуда

$$f\left(\frac{\Delta x}{m}\right) = \frac{1}{m} f(\Delta x).$$

Сопоставляя предыдущие равенства, получим

$$f\left(\frac{n}{m} \Delta x\right) = \frac{n}{m} f(\Delta x),$$

т. е. второе условие, определяющее линейную вектор-функцию, выполняется для рациональных множителей  $\alpha = \frac{n}{m}$ . Но так как  $f$  по предположению непрерывна, то это условие будет выполняться и для любых действительных  $\alpha$ :

$$f(\alpha \Delta x) = \alpha f(\Delta x).$$

Таким образом, мы доказали, что при однородной деформации вектор  $\Delta u$ , определяющий деформацию окрестности точки  $M$  рассматриваемого тела, является линейной вектор-функцией от  $\Delta x$ . Если обозначить через  $\Delta x_i$  и  $\Delta u_i$  координаты векторов  $\Delta x$  и  $\Delta u$  относительно ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , то эта линейная вектор-функция может быть записана в виде

$$\Delta u_i = e_{ij} \Delta x_j,$$

где  $e_{ij}$  — тензор второй валентности. Если обозначить через  $\Delta y_i$  координаты вектора  $\Delta \mathbf{y}$ , характеризующего положение точки  $N_1$  тела относительно точки  $N$ , то из равенства (2) получим

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + e_{ij}) \Delta x_j. \quad (3)$$

Так как деформация предполагается малой, то компоненты тензора  $e_{ij}$  следует считать настолько малыми, что их произведениями при вычислениях можно пренебрегать.

Тензор  $e_{ij}$  описывает не только деформацию окрестности точки  $M$  рассматриваемого тела, но и ее вращение вокруг точки  $M$ . Чтобы выделить из него часть, которая определяет чистую деформацию, рассмотрим, как меняются метрические свойства (длины и углы) при переходе от окрестности точки  $M$  к окрестности точки  $N$ . Метрические свойства в окрестности точки  $M$  определяются квадратичной формой  $\Delta x^2$ , а в окрестности точки  $N$  — квадратичной формой  $\Delta y^2$ . Но из равенства (2) следует, что

$$\Delta y^2 = \Delta x^2 + 2\Delta x \Delta u + \Delta u^2.$$

Так как деформация малая, то третьим слагаемым в правой части равенства можно пренебречь, и мы получим

$$\Delta y^2 = \Delta x^2 + 2\Delta x \Delta u,$$

откуда

$$\Delta y^2 - \Delta x^2 = 2\Delta x \Delta u.$$

Полученная величина характеризует чистую деформацию окрестности точки  $M$ . Правая часть этого выражения может быть записана в виде

$$2\Delta x \Delta u = 2e_{ij} \Delta x_i \Delta x_j. \quad (4)$$

Разложим теперь тензор  $e_{ij}$  на симметричную часть  $\varepsilon_{ij}$  и кососимметричную часть  $\omega_{ij}$ :

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij},$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}).$$

Подставляя это разложение тензора  $e_{ij}$  в равенство (4), получим

$$2\Delta x \Delta u = 2\varepsilon_{ij} \Delta x_i \Delta x_j,$$

так как  $\omega_{ij}\Delta x_i\Delta x_j = 0$ . Следовательно, деформация окрестности точки  $M$  определяется только симметричным тензором  $\epsilon_{ij}$ , который и называется *тензором деформации*. Кососимметричный тензор  $\omega_{ij}$  не влияет на изменение метрических свойств окрестности точки  $M$  и, следовательно, определяет ее вращение вокруг точки  $M$ .

4. Рассмотрим отдельно случаи, когда тензор  $e_{ij}$  является симметричным или кососимметричным тензором. Пусть сначала  $e_{ij} = \omega_{ij}$  — кососимметричный тензор. Покажем, что этот тензор порождает малый поворот окрестности точки  $M$  вокруг оси, определяемой вектором  $\omega = \omega_i e_i$ , где

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{jk}.$$

В самом деле, если  $\Omega$  — линейное преобразование, имеющее кососимметричную матрицу  $(\omega_{ik})$ , то, как было показано в гл. III (стр. 106),

$$\Omega \Delta x = \omega \times \Delta x.$$

Поэтому

$$\Delta u = \omega \times \Delta x$$

и

$$\Delta y = \Delta x + \omega \times \Delta x.$$

Но легко видеть, что последнее преобразование представляет собой поворот на малый угол  $|\omega|$  вокруг оси, проходящей через точку  $O$  и определяемой вектором  $\omega$  (рис. 19). Действительно, вектор  $\Delta u$  будет касательным к окружности, описываемой концом вектора  $\Delta x$  при его вращении вокруг оси  $O\omega$ , и его длина равна  $|\Delta u| = |\omega| \rho$ , где  $\rho$  — расстояние конца вектора  $\Delta x$  до оси  $O\omega$ .

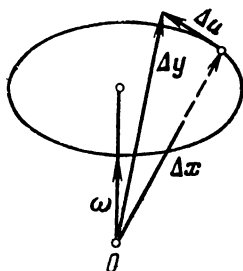


Рис. 19.

Построим окружность, описанную концом вектора  $\Delta x$  при его вращении вокруг оси  $O\omega$ , и его длина равна  $|\Delta u| = |\omega| \rho$ , где  $\rho$  — расстояние конца вектора  $\Delta x$  до оси  $O\omega$ .

Пусть теперь  $e_{ij} = \epsilon_{ij}$  — симметричный тензор. Этот тензор определяет чистую деформацию окрестности точки  $M$ . Тогда

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + \epsilon_{ij}) \Delta x_j.$$

Вектор  $\Delta x = \Delta x_1 e_1$  переходит в вектор

$$\Delta y = [(1 + \epsilon_{11}) e_1 + \epsilon_{21} e_2 + \epsilon_{31} e_3] \Delta x_1.$$



При этом с точностью до величин второго порядка малости

$$|\Delta y| = (1 + \epsilon_{11}) |\Delta x|.$$

Следовательно, компонента  $\epsilon_{11}$  тензора  $\epsilon_{ij}$  определяет относительное удлинение тела вдоль направления  $e_1$ . Компоненты  $\epsilon_{21}$  и  $\epsilon_{31}$  будут определять поворот этого направления по отношению к векторам  $e_2$  и  $e_3$ . Точно так же компоненты  $\epsilon_{22}$  и  $\epsilon_{33}$  определяют относительное удлинение тела вдоль направлений  $e_2$  и  $e_3$ , а компоненты  $\epsilon_{ij}$  при  $i \neq j$  — поворот этих направлений. Кроме того, так как  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ , то поворот вектора  $e_j$  в направлении вектора  $e_i$  совпадает с поворотом вектора  $e_i$  в направлении вектора  $e_j$ . Компоненты  $\epsilon_{ij}$  при  $i \neq j$  называют *сдвиговыми компонентами* тензора деформации.

Найдем теперь относительное удлинение тела вдоль произвольного направления, определяемого единичным вектором  $l = l_i e_i$ . Пусть  $\Delta x = \Delta x l$ . Тогда

$$\Delta u_i = \epsilon_{ij} l_j \Delta x.$$

Удлинение тела вдоль направления вектора  $l$  равно проекции вектора  $\Delta u$  на  $l$ , которая вычисляется следующим образом:

$$\text{Пр}_l \Delta u = l \cdot \Delta u = \epsilon_{ij} l_i l_j \Delta x.$$

Относительное удлинение тела вдоль направления вектора  $l$  равно отношению этой проекции к первоначальной длине вектора  $\Delta x$ , т. е. к  $\Delta x$ . Если обозначить относительное удлинение через  $\epsilon(l)$ , то

$$\epsilon(l) = \epsilon_{ij} l_i l_j.$$

Легко найти величину относительного удлинения  $\epsilon(l)$  тела, построив характеристическую поверхность тензора  $\epsilon_{ij}$ , уравнение которой имеет вид

$$\epsilon_{ij} x_i x_j = 1.$$

Используя результат, полученный в § 5 гл. II, можно написать, что

$$\epsilon(l) = \frac{1}{OM^2},$$

где  $OM$  — расстояние от центра  $O$  характеристической поверхности до точки  $M$ , в которой она пересекается с лучом  $Ol$ .

Определим еще, как изменится объем при деформации тела, определяемой тензором  $\epsilon_{ij}$ . Как было доказано в гл. III

(стр. 96), коэффициент искажения объемов при линейном преобразовании равен определителю матрицы этого линейного преобразования. Если обозначить через  $\Delta v_x$  объем элемента тела до деформации, а через  $\Delta v_y$  — объем того же элемента после деформации, то получим

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta v_x} = |\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}| \approx 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

где в правой части отброшены слагаемые, содержащие произведения компонент тензора деформации, являющиеся величинами не ниже второго порядка малости. Из этого соотношения видно, что коэффициент объемного расширения тела при деформации, определяемой тензором  $\varepsilon_{ij}$ , равен следу этого тензора:

$$\mu = \text{Sp } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ii}.$$

Приведем симметричный тензор  $\varepsilon_{ij}$  к главным осям. Тогда его матрица примет диагональный вид:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения  $\varepsilon_i$  тензора  $\varepsilon_{ij}$  называются *главными коэффициентами деформации* тела, а его главные оси — *главными направлениями деформации*. Главные направления деформации тела характеризуются тем, что они остаются взаимно ортогональными при деформации. Главные коэффициенты деформации  $\varepsilon_i$  определяют удлинение тела вдоль главных направлений деформации.

5. Вернемся теперь к общему случаю. Пусть однородная малая деформация тела определяется уравнениями

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + e_{ij}) \Delta x_j, \quad (5)$$

где  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$ . Так как с точностью до величин второго порядка малости

$$\delta_{ij} + e_{ij} \approx (\delta_{ik} + \omega_{ik})(\delta_{kj} + \varepsilon_{kj}),$$

то произвольная деформация окрестности точки  $M$  представляет произведение чистой деформации, определяемой симметричным тензором деформации  $\varepsilon_{kj}$ , и поворота, определяемого

кососимметричным тензором  $\omega_{ij}$ . При этом главные направления тензора деформации, оставаясь неподвижными в теле, поворачиваются вместе с ним под влиянием тензора поворота  $\omega_{ij}$  вокруг вектора  $\omega$  с координатами  $\omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{jk}$  на угол  $|\omega|$ .

Рассмотрим поверхность, в которую перейдет сфера радиуса  $\rho$  с центром в точке  $M$  при малой деформации тела. Уравнение этой сферы может быть записано в виде

$$\Delta x^2 = \rho^2. \quad (6)$$

Чтобы получить уравнение искомой поверхности, нужно в уравнении (6) выразить координаты вектора  $\Delta x$  через координаты вектора  $\Delta y$  с помощью уравнений (5). С точностью до величин второго порядка малости мы имеем

$$\Delta x_i = (\delta_{ij} - e_{ij}) \Delta y_j.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6) и снова отбрасывая члены второго порядка малости, получаем

$$(\delta_{ij} - 2e_{ij}) \Delta y_i \Delta y_j = \rho^2.$$

Но так как  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$ , где  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ , то последнее уравнение может быть переписано в виде

$$(\delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}) \Delta y_i \Delta y_j = \rho^2. \quad (7)$$

Таким образом, при рассматриваемой деформации сфера с центром в точке  $M$ , определяемая уравнением (6), переходит в центральную поверхность второго порядка с центром в точке  $N$ , определяемую уравнением (7). Легко доказать, что эта поверхность будет эллипсоидом. В самом деле, приведем тензор  $\varepsilon_{ij}$  к каноническому виду. Тогда уравнение (7) запишется так:

$$(1 - 2\varepsilon_1) \Delta y_1^2 + (1 - 2\varepsilon_2) \Delta y_2^2 + (1 - 2\varepsilon_3) \Delta y_3^2 = \rho^2.$$

Пользуясь малостью величин  $\varepsilon_i$ , перепишем его в виде

$$\frac{\Delta y_1^2}{\rho^2(1 + \varepsilon_1)^2} + \frac{\Delta y_2^2}{\rho^2(1 + \varepsilon_2)^2} + \frac{\Delta y_3^2}{\rho^2(1 + \varepsilon_3)^2} = 1.$$

А это уравнение представляет собой уравнение эллипсоида, полуоси которого  $\rho_i = \rho(1 + \varepsilon_i)$ . Этот эллипсоид называется *эллипсоидом деформации*.

6. Заметим, что рассмотренные тензоры напряжений и деформации не связаны с симметрией кристалла. Это происходит потому, что указанные тензоры описывают не свойства кристалла, а первый из них описывает внешнее воздействие на кристалл, а второй — реакцию кристалла на это или какое-либо другое воздействие. Такие тензоры в кристаллографии называют *полевыми* тензорами. Тензоры же, описывающие свойства кристалла, называют *материальными* тензорами. К ним относятся рассмотренные выше тензор удельной электропроводности, тензор теплопроводности, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости и целый ряд тензоров, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Однородное тело находится под действием растягивающего усилия, направленного вдоль единичного вектора  $l = l_i e_i$  и равного  $\sigma \text{ кг/см}^2$ . Определить тензор напряжения этого тела.

2. Доказать, что если след тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  равен нулю, то этот тензор может быть приведен к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

(Это означает, что тензор  $\sigma_{ij}$  определяет напряжение сдвига.)

3. Доказать, что произвольное напряженное состояние тела, определяемое тензором напряжения  $\sigma_{ij}$ , может быть представлено в виде суммы гидростатического сжатия и напряжения сдвига.

4. В базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  компоненты тензора напряжений однородного тела имеют следующие значения:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Найти главные направления и главные напряжения этого тензора.

б) Написать уравнение характеристической поверхности тензора  $\sigma_{ij}$  в старой и новой системах координат.

в) Представить тензор  $\sigma_{ij}$  в виде суммы тензора  $\sigma''_{ij}$ , определяющего гидростатическое сжатие, и тензора  $\sigma'_{ij}$ , определяющего сдвиг.

г) Найти базис, в котором тензор  $\sigma'_{ij}$  будет иметь только сдвиговые компоненты.

5. Однородное тело подвергается деформации сдвига так, что все плоскости, параллельные плоскости  $x_1 O x_2$ , переходят в себя и

все точки тела перемещаются в направлении единичного вектора  $l = l_1 e + l_2 e_2$ , параллельного этой плоскости. Найти тензор деформации тела.

6. Малая деформация тела задается тензором

$$(e_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

а) Определить тензор чистой деформации  $\epsilon_{ij}$  и тензор поворота  $\omega_{ij}$ .

б) Найти главные коэффициенты и главные направления деформации тела.

в) Написать уравнение эллипсоида деформации в старой и новой системах координат.

г) Найти направление оси вращения и угол поворота тела.

7. Доказать, что тензор деформации  $\epsilon_{ij}$  может быть представлен в виде

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + \epsilon''_{ij},$$

где тензор  $\epsilon'_{ij}$  определяет деформацию чистого сдвига, т. е. удовлетворяет условию  $\epsilon'_{ii} = 0$ , а тензор  $\epsilon''_{ij}$  определяет всестороннее сжатие и пропорционален тензору  $\delta_{ij}$ . Найти тензоры  $\epsilon'_{ij}$  и  $\epsilon''_{ij}$ .

#### § 4. Дальнейшие свойства кристаллов

1. В § 2 мы рассмотрели некоторые свойства кристаллов. Все они были связаны с воздействием на кристалл некоторой векторной величины, вызывающей в ней эффект, характеризуемый снова векторной величиной. Такие свойства кристаллов описываются тензорами второй валентности. Сейчас мы рассмотрим свойства кристаллов, которые связаны либо с воздействием на кристалл не векторных величин, либо с тем, что эффект, вызываемый в кристалле этим воздействием, характеризуется не векторной величиной.

Самым простым свойством такого рода является *тепловое расширение* кристалла. При изменении температуры кристалла на величину  $\Delta T$  происходит деформация кристалла, описываемая тензором деформации  $\epsilon_{ij}$ , которая для малых значений  $\Delta T$  пропорциональна изменению температуры. Поэтому должно иметь место соотношение

$$\epsilon_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T.$$

Так как  $\Delta T$  — скаляр, а  $\epsilon_{ij}$  — симметричный тензор второй валентности, то  $\alpha_{ij}$  будет также симметричным тензором второй валентности, который называется *тензором теплового расширения*. Главные направления тензора  $\alpha_{ij}$  называются *главными направлениями теплового расширения*, а его собственные значения  $\alpha_i$  — *главными коэффициентами расширения*. Характеристическая поверхность тензора расширения имеет уравнение

$$\alpha_{ij}x_ix_j = 1.$$

Форма и положение этой поверхности в кристалле, согласно принципу Неймана (стр. 232), связаны с симметрией, которой обладает кристалл.

2. В некоторых кристаллах под действием напряжений возникает электрическая поляризация. Это явление называется *прямым пьезоэлектрическим эффектом*. Напряжение в кристалле описывается тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ , а электрическая поляризация — вектором  $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ . Связь между этими величинами при достаточно малых напряжениях оказывается линейной, и поэтому

$$p_i = d_{ijk} \sigma_{jk}, \quad (1)$$

где  $d_{ijk}$  — тензор валентности три. Компоненты этого тензора называют *пьезоэлектрическими модулями*, а сам тензор — *тензором пьезоэлектрических модулей* кристалла. Так как тензор напряжений  $\sigma_{jk}$  симметричен относительно индексов  $j$  и  $k$ , то и тензор  $d_{ijk}$  будет симметричен по этим индексам,  $d_{ijk} = d_{ikj}$ . Поэтому он имеет 18 независимых компонент.

Если пьезоэлектрический кристалл помещен в электрическое поле, то его форма меняется — в нем возникает деформация. Это явление называется *обратным пьезоэлектрическим эффектом*. Напряженность электрического поля описывается вектором  $\mathbf{E} = E_i \mathbf{e}_i$ , а деформация кристалла — тензором деформации  $\epsilon_{ij}$ . Так как зависимость между этими величинами при достаточно малых напряжениях  $\mathbf{E}$  линейная, то она может быть выражена уравнениями

$$\epsilon_{jk} = d'_{ijk} E_i,$$

где  $d'_{ijk}$  — тензор валентности три, симметричный по индексам  $j$  и  $k$ . В кристаллофизике доказывается (см., например, [17], стр. 242), что прямой и обратный пьезоэлектрические

эффекты описываются одним и тем же тензором, т. е. что  $d_{ijk} = d_{ijk}$ . Поэтому связь между напряжением электрического поля  $E_i$  и деформацией кристалла записывается в виде

$$\varepsilon_{jk} = d_{ijk} E_i, \quad (2)$$

где  $d_{ijk}$  — снова тензор пьезоэлектрических модулей.

Рассмотрим теперь, как влияет симметрия кристалла на строение тензора  $d_{ijk}$ . Предположим, что кристалл переводится в себя ортогональным преобразованием с матрицей  $A$ . В силу принципа Неймана пьезоэлектрические свойства кристалла при этом не изменяются. Произведем преобразование ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , связанного с кристаллом, при помощи матрицы  $\Gamma = A^{-1}$ . Тогда в новом базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  компоненты тензора пьезоэлектрических модулей должны совпадать с соответствующими компонентами в старом базисе, т. е.

$$d_{i'j'k'} = d_{ijk},$$

где  $i' = i, j' = j, k' = k$ . Но если матрица  $\Gamma$  имеет вид  $\Gamma = (\gamma_{i'p})$ , то при преобразовании базиса компоненты тензора  $d_{i'j'k'}$  преобразуются по обычным формулам:

$$d_{i'j'k'} = \gamma_{i'p} \gamma_{j'q} \gamma_{k'r} d_{pqr}.$$

Сравнивая два последних соотношения, найдем условие инвариантности пьезоэлектрических свойств кристалла по отношению к преобразованию  $A$ :

$$d_{ijk} = \gamma_{i'p} \gamma_{j'q} \gamma_{k'r} d_{pqr}. \quad (3)$$

Пусть, например, преобразование  $A$  представляет собой симметрию кристалла относительно некоторой точки — центра симметрии кристалла. Тогда матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и  $\Gamma = A^{-1} = A$ . Поэтому уравнения (3) принимают вид

$$d_{ijk} = -d_{ijk},$$

откуда следует, что  $d_{ijk} = 0$ . Это означает, что кристалл, обладающий центральной симметрией, не может быть пьезоэлектриком.

Предположим, далее, что кристалл имеет ось симметрии второго порядка, пусть этой осью будет ось  $Ox_3$ . Тогда этот кристалл переходит в себя при преобразовании  $A$  с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае снова  $\Gamma = A$ , и из условия (3) инвариантности тензора  $d_{ijk}$  получим

$$\begin{aligned} d_{111} = d_{112} = d_{211} = d_{122} = d_{212} = d_{222} &= 0, \\ d_{133} = d_{233} = d_{313} = d_{323} &= 0. \end{aligned}$$

Отличными от нуля будут лишь те восемь компонент тензора  $d_{ijk}$ , в которых либо один, либо все три индекса принимают значение 3. Подобным образом можно определить строение тензора  $d_{ijk}$  для всех кристаллографических классов.

Рассмотрим характеристическую поверхность тензора пьезоэлектрических модулей. Ее уравнение записывается в виде (гл. II, стр. 79)

$$d_{ijk} x_i x_j x_k = 1.$$

Выясним, какой физический смысл имеет эта поверхность.

Предположим, что кристалл подвергается однородному растяжению вдоль направления, определяемого единичным вектором  $\mathbf{l}$ . Обозначим через  $\sigma$  величину нормального напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную этому направлению.

Тогда тензор напряжения этого кристалла имеет вид

$$\sigma_{ij} = l_i l_j \sigma$$

(см. упр. 1 на стр. 247). Поэтому уравнение (1) перепишется в форме

$$p_i = d_{ijk} l_j l_k \sigma.$$

Найдем составляющую вектора  $\mathbf{p}$  электрической поляризации кристалла по направлению вектора  $\mathbf{l}$ . Так как  $|\mathbf{l}| = 1$ , то эта составляющая определяется по формуле

$$\text{Пр}_{\mathbf{l}} \mathbf{p} = \mathbf{l} \mathbf{p} = l_i p_i,$$

в силу чего

$$\text{Пр}_{\mathbf{l}} \mathbf{p} = d_{ijk} l_i l_j l_k \sigma.$$



Но, как мы видели ранее (гл. II, стр. 81),

$$d_{ijk}l_i l_j l_k = \frac{1}{OM^3}, \quad (4)$$

где  $OM$  — расстояние от начала координат до точки  $M$  характеристической поверхности тензора  $d_{ijk}$ , в которой она пересекается с прямой  $OL$ . Поэтому

$$\frac{\text{Пр}_l p}{\sigma} = \frac{1}{OM^3},$$

т. е. при растяжении пьезоэлектрического кристалла отношение проекции вектора электрической поляризации на направление растяжения к величине нормального напряжения кристалла равно единице, деленной на куб расстояния от начала координат до лежащей в направлении удлинения точки характеристической поверхности тензора пьезоэлектрических модулей.

Пусть, далее,  $E$  — напряженность электрического поля, в котором находится кристалл, и  $E = El$ , где  $l$  — единичный вектор с координатами  $l_i$ . Формула (2) теперь имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = d_{ijk} l_k E.$$

Найдем относительное удлинение кристалла в направлении вектора  $l$ , которое произойдет в нем под воздействием напряженности  $E$ . Это относительное удлинение, как было показано в § 3 (стр. 244), равно

$$\varepsilon(l) = \varepsilon_{ij} l_i l_j.$$

Поэтому

$$\varepsilon(l) = d_{ijk} l_i l_j l_k E.$$

Пользуясь соотношением (4), мы получим, что

$$\frac{\varepsilon(l)}{E} = \frac{1}{OM^3},$$

где  $OM$  — расстояние от начала координат до точки характеристической поверхности тензора пьезоэлектрических модулей, лежащей в направлении вектора  $l$ .

Заметим, что так как тензор  $d_{ijk}$  не является симметричным, то его характеристическая поверхность описывает не все свойства этого тензора, а только свойства его симметричной части.

3. В предыдущем параграфе мы рассматривали тензоры напряжения и деформации однородного тела независимо друг от друга. Но обычно напряжения, которые возникают в теле, вызывают его деформацию. Если величины напряжений не превышают некоторых предельных значений, то деформация тела является обратимой, т. е. она исчезает при снятии напряжений. Такая деформация называется *упругой*. Упругая деформация тела линейно зависит от его напряжений. Так как деформация тела описывается тензором деформации  $\epsilon_{ij}$ , а его напряженное состояние — тензором напряжения  $\sigma_{ij}$ , то линейная зависимость между этими тензорами может быть записана в виде

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (5)$$

Как следует из теоремы, доказанной в гл. II (стр. 69), входящие в эти соотношения коэффициенты  $s_{ijkl}$  образуют тензор четвертой валентности. Этот тензор называют *тензором модулей податливости* кристалла.

Так как тензоры  $\epsilon_{ij}$  и  $\sigma_{kl}$  симметричны, то и тензор  $s_{ijkl}$  будет симметричным по двум первым и двум последним индексам:

$$s_{ijkl} = s_{jikl}, \quad s_{ijkl} = s_{ijlk}. \quad (6)$$

Но в теории упругости показывается (см., например, [17], стр. 52), что тензор  $s_{ijkl}$  обладает еще одной симметрией:

$$s_{ijkl} = s_{klij}. \quad (7)$$

Тензор  $s_{ijkl}$  имеет всего  $3^4 = 81$  компоненту. Но в силу указанных здесь симметрий число различных из этих компонент значительно уменьшается. Как показывает несложный подсчет, число различных компонент этого тензора в общем случае равно 21.

Часто вместо уравнений (5) рассматривают выражение тензора деформации через тензор напряжения. Это выражение может быть записано в виде

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (8)$$

Входящие сюда коэффициенты  $c_{ijkl}$  также образуют четырехвалентный тензор, который называют *тензором модулей упругости*. Этот тензор обладает такими же симметриями, как и тензор  $s_{ijkl}$ . Тензор  $c_{ijkl}$  является в некотором смысле

обратным тензором для тензора  $s_{ijkl}$ . Если подставить выражения тензора  $\sigma_{ij}$  по формулам (8) в уравнения (5), то получатся соотношения

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijpq} c_{pqkl} \varepsilon_{kl}$$

Отсюда следует, что

$$s_{ijpq} c_{pqkl} = \delta_{i(k} \delta_{j)l},$$

где в правой части этого равенства произведено симметрирование по индексам  $k$  и  $l$ . Здесь

$$\delta_{i(k} \delta_{j)l} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

— тензор, симметричный по индексам  $i, j$  и  $k, l$  и не меняющийся также при перестановке этих пар индексов.

4. Из принципа Неймана (стр. 232) следует, что наличие той или иной симметрии у кристалла влечет за собой соответствующую симметрию его упругих свойств, т. е. приводит к появлению определенных зависимостей между компонентами тензоров  $s_{ijkl}$  и  $c_{ijkl}$ . Будем для определенности рассматривать тензор модулей упругости  $c_{ijkl}$ . При переходе от базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  к новому базису  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  коэффициенты тензора  $c_{ijkl}$  преобразуются по формулам

$$c_{i'j'k'l'} = \gamma_{i'p} \gamma_{j'q} \gamma_{k'r} \gamma_{l's} c_{pqrs}$$

Если свойства кристалла относительно обоих рассматриваемых базисов оказываются одинаковыми, то имеют место соотношения

$$c_{i'j'k'l'} = c_{ijkl},$$

где  $i' = i, j' = j, k' = k$  и  $l' = l$ . Сравнивая два предыдущих равенства, мы найдем искомые соотношения между компонентами тензора  $c_{ijkl}$  в виде

$$c_{ijkl} = \gamma_{i'p} \gamma_{j'q} \gamma_{k'r} \gamma_{l's} c_{pqrs}, \quad (9)$$

где преобразование координат, определяемое матрицей  $\Gamma = (\gamma_{i'p})$ , принадлежит точечной группе преобразований кристалла.

Посмотрим, как отразится на строении тензора  $c_{ijkl}$  наличие некоторых элементов симметрии в кристалле. Заметим прежде всего, что наличие центра симметрии не влияет на

строение этого тензора, так как центральная симметрия определяется матрицей  $\Gamma_0 = -E$ , подстановка которой в равенства (9) приводит к тождеству. Предположим, далее, что кристалл имеет ось симметрии. Примем эту ось за ось  $Oe_3$ . Тогда матрица  $\Gamma$  будет иметь вид

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

вследствие чего равенства (9) запишутся так:

$$c_{ijkl} = (-1)^{\nu} c_{ijkl},$$

где  $\nu$  равно числу единиц или двоек среди индексов  $i, j, k, l$ . Поэтому обратятся в нуль все те компоненты тензора  $c_{ijkl}$ , у которых три или один индекс равны трем. В силу условий симметрии (6) и (7) эти равенства могут быть записаны в виде

$$c_{i333} = 0, \quad c_{ijk3} = 0, \quad (10)$$

где индексы  $i, j, k$  принимают только значения 1 и 2. Мы имеем здесь 8 независимых соотношений для компонент тензора  $c_{ijkl}$ . Следовательно, при наличии оси симметрии тензор модулей упругости имеет только 13 независимых компонент вместо 21 в общем случае.

Покажем теперь, что если тензор  $c_{ijkl}$  допускает симметрию кристалла относительно некоторой оси, то он допускает также его симметрию относительно плоскости, перпендикулярной этой оси. В самом деле, переход к новой системе координат, симметричной исходной относительно плоскости  $x_1 O x_2$ , определяется матрицей

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и легко проверить, что  $\Gamma_2 = \Gamma_1 \Gamma_0$ . Но так как тензор  $c_{ijkl}$  инвариантен по отношению к преобразованиям, определяемым матрицами  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , то он будет инвариантен и по отношению к произведению этих преобразований.

Очевидно, что справедливым будет и обратное предложение: *если тензор  $c_{ijkl}$  допускает симметрию относительно некоторой плоскости, то он допускает симметрию и относительно любой перпендикулярной ей оси.* Отсюда вытекает, что если кристалл допускает симметрию относительно плоскости  $x_1Ox_2$ , то тензор модулей упругости этого кристалла снова связан восемью соотношениями (10) и имеет только 13 независимых компонент.

Подобным же образом, пользуясь соотношениями (9), можно найти зависимость между компонентами тензора  $c_{ijkl}$  при наличии других элементов симметрии в кристалле и найти эти зависимости для всех кристаллографических систем и классов.

5. Рассмотрим еще вопрос о том, каково будет строение тензора  $c_{ijkl}$  в изотропной среде. Для такой среды уравнения (9) должны выполняться тождественно. Однако эти уравнения содержат четвертые степени величин  $\gamma_{ip}$ , которые к тому же не являются независимыми, а связаны соотношениями

$$\gamma_{ip}\gamma_{jp} = \delta_{ij}$$

(гл. I, стр. 34). Поэтому непосредственное их исследование оказывается трудным.

Чтобы облегчить решение задачи, будем считать, что преобразование ортонормированного базиса, определяемое матрицей  $\Gamma$ , есть бесконечно малый поворот вокруг некоторой оси. Тогда эта матрица может быть записана в виде

$$\Gamma = E + \Omega,$$

где  $\Omega = (\omega_{ij})$  — матрица, квадратами и произведениями компонент которой мы можем пренебречь. Основное соотношение

$$\Gamma\Gamma^* = E,$$

которому удовлетворяет ортогональная матрица, теперь может быть переписано в виде

$$(E + \Omega)(E + \Omega)^* = E,$$

откуда

$$E + \Omega + \Omega^* + \Omega\Omega^* = E.$$

Отбрасывая в этом равенстве матрицу  $\Omega\Omega^*$ , компонентами которой будут величины второго порядка малости, мы

получим отсюда, что

$$\Omega + \Omega^* = N,$$

т. е.  $\Omega$  — кососимметричная матрица.

Теперь компоненты матрицы  $\Gamma$  могут быть записаны в виде

$$\gamma_{ip} = \delta_{ip} + \omega_{ip},$$

где  $\omega_{ip} + \omega_{pi} = 0$ . Подставляя значения этих компонент в равенства (9) и отбрасывая в них величины, порядок малости которых выше первого, получим

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= (\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}\delta_{ls} + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}\omega_{ls} + \\ &+ \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{ls}\omega_{kr} + \delta_{ip}\delta_{kr}\delta_{ls}\omega_{jq} + \delta_{jq}\delta_{kr}\delta_{ls}\omega_{ip}) c_{pqrs} = \\ &= c_{ijkl} + \omega_{lp}c_{ijkp} + \omega_{kp}c_{ijpl} + \omega_{jp}c_{ipkl} + \omega_{ip}c_{pjkl}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют соотношения

$$\omega_{lp}c_{ijkp} + \omega_{kp}c_{ijpl} + \omega_{jp}c_{ipkl} + \omega_{ip}c_{pjkl} = 0, \quad (11)$$

которые должны выполняться тождественно относительно трех независимых компонент  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{23}$  и  $\omega_{31}$  матрицы  $\Omega$ . Индексы  $i, j, k$  и  $l$  в этих соотношениях могут принимать независимо друг от друга любые значения из 1, 2, 3. Поэтому число этих соотношений равно  $3^4 = 81$ . Однако в силу условий симметрии (6) и (7), которым удовлетворяет тензор  $c_{ijkl}$ , количество этих соотношений снижается до 21. Рассмотрим соотношения (11) для всех возможных значений индексов  $i, j, k, l$ .

а) Пусть  $i = j = k = l$ . Тогда соотношения (11) принимают вид

$$\omega_{ip}c_{piii} = 0,$$

где только по индексу  $p$  производится суммирование. Распишем эту сумму подробно, учитывая, что  $\omega_{ii} = 0$ :

$$\omega_{im}c_{miii} + \omega_{in}c_{niii} = 0.$$

Здесь мы считаем, что по индексам  $i, m$  и  $n$  суммирование не производится, они не равны между собой и представляют некоторую комбинацию из чисел 1, 2, 3. Так как величины  $\omega_{im}$  и  $\omega_{in}$  независимы, а эти соотношения должны выполняться тождественно, то получим отсюда, что

$$c_{mii} = 0. \quad (12)$$

б) Пусть  $i=j=k \neq l$ . Тогда соотношения (11) переписутся в виде

$$\omega_{lp}c_{iiip} + \omega_{ip}(c_{iip l} + 2c_{ipil}) = 0.$$

Расписывая подробно эту сумму, учитывая, что  $\omega_{ii} = 0$  и что выполняются соотношения (12), получим

$$\omega_{li}c_{iiii} + \omega_{il}(c_{iill} + 2c_{iili}) + \omega_{im}(c_{iiml} + 2c_{imil}) = 0,$$

где снова  $i, l, m$  — некоторая комбинация из разных чисел 1, 2, 3 и суммирование по этим индексам нет. Так как  $\omega_{li} = -\omega_{il}$  и величины  $\omega_{il}$  и  $\omega_{im}$  независимы, то отсюда следуют два равенства:

$$c_{iiii} = c_{iill} + 2c_{iili} \quad (13)$$

$$c_{iiml} + 2c_{imil} = 0. \quad (14)$$

в) Пусть  $i=j \neq k=l$ . Тогда соотношения (11) дают

$$\omega_{kp}c_{iikp} + \omega_{ip}c_{ipkk} = 0.$$

Если записать эту сумму подробно, как было сделано выше для предыдущих случаев, и использовать независимость величин  $\omega_{ik}$ ,  $\omega_{im}$  и  $\omega_{km}$ , то отсюда получим новые соотношения

$$c_{iikm} = 0, \quad (15)$$

где  $i, k, m$  — произвольная комбинация из трех разных чисел 1, 2, 3.

г) При  $i=k \neq j=l$ ; соотношения (11) дадут

$$c_{ijim} = 0. \quad (16)$$

Заметим, что в силу (15) и (16) соотношения (14) удовлетворяются тождественно.

д) Пусть, наконец,  $i \neq j$ ,  $i \neq k$ ,  $j \neq k$ ,  $k=l$ . Тогда получим

$$2\omega_{kp}c_{ijkp} + \omega_{jp}c_{ipkk} + \omega_{ip}c_{pjkk} = 0,$$

где суммирование производится только по индексу  $p$ . Рассуждения, подобные проведенным выше, показывают, что из этих соотношений следуют равенства

$$c_{iikk} = c_{jjkk}. \quad (17)$$

Перепишем (13) в виде

$$c_{iiii} = c_{iikk} + 2c_{ikik}.$$

Вычитая эти соотношения из исходных равенств (13) и учитывая, что в силу (17)

$$c_{iill} = c_{iikk},$$

получим

$$c_{iill} = c_{ikik}. \quad (18)$$

Больше никаких соотношений на компоненты тензора  $c_{ijkl}$  получить нельзя, так как мы использовали все независимые соотношения (11), общее число которых, как уже указывалось ранее, равно 21.

Соотношения (17) можно переписать в виде

$$c_{1122} = c_{1133} = c_{2233} = \lambda,$$

а соотношения (18) — в виде

$$c_{1212} = c_{1313} = c_{2323} = \mu.$$

Тогда равенства (13) дадут

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} = \lambda + 2\mu.$$

Таким образом, для изотропной среды тензор  $c_{ijkl}$  имеет всего две независимые компоненты, 9 отличных от нуля компонент, и 15 его компонент равны нулю. Величины  $\lambda$  и  $\mu$ , через которые выражаются компоненты этого тензора, называются *коэффициентами Ламе*.

Рассмотрим теперь тензор

$$t_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Он обладает симметриями типа (6) и (7). Непосредственной проверкой легко убедиться, что компоненты этого тензора в точности совпадают с полученными выше значениями компонент тензора  $c_{ijkl}$ . Поэтому для изотропной среды тензор модулей упругости может быть записан в виде

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Соотношения (8), которые связывают тензор деформации  $\epsilon_{ij}$  и тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ , в изотропной среде могут быть переписаны так:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}. \quad (19)$$



Представим деформацию, определяемую тензором  $\epsilon_{ij}$ , в виде суммы деформации чистого сдвига и всестороннего сжатия (см. упр. 7 на стр. 248). Тогда

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + \epsilon''_{ij},$$

где

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk}, \quad \epsilon''_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk}.$$

Подставляя это разложение в соотношения (19), получим

$$\sigma_{ij} = \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon'_{ij}. \quad (20)$$

Коэффициент  $k = \lambda + \frac{2}{3} \mu$  называют *модулем всестороннего сжатия* упругой среды, а коэффициент  $\mu$  — *модулем сдвига*.

Соотношения (19) и (20) позволяют получить обратные формулы, выражающие тензор деформации  $\epsilon_{ij}$  через тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ . Свертывая соотношения (20) по индексам  $i$  и  $j$  и учитывая, что  $\epsilon'_{ii} = 0$ , мы получим

$$\sigma_{kk} = 3k \epsilon_{kk},$$

откуда

$$\epsilon_{kk} = \frac{1}{3k} \sigma_{kk}.$$

Подставляя это соотношение в (19), заменим там коэффициент  $\lambda$  через  $k - \frac{2}{3} \mu$  и разрешим полученное соотношение относительно  $\epsilon_{ij}$ . Тогда найдем

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{9k} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right).$$

Первый член суммы, стоящей в правой части, определяет всестороннее сжатие тела, а второй — его деформацию сдвига.

Последнее соотношение может быть переписано также в форме

$$\epsilon_{ij} = \frac{2\mu - 3k}{18\mu k} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}.$$

Отсюда ясно, что тензор модулей податливости однородной изотропной среды может быть записан в виде

$$s_{ijkl} = \frac{2\mu - 3k}{18\mu k} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Главные коэффициенты теплового расширения кристалла гипса равны  $\alpha_1 = 1,6 \cdot 10^{-6}$ ,  $\alpha_2 = 42 \cdot 10^{-6}$ ,  $\alpha_3 = 29 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ . Определить:

а) коэффициент объемного расширения гипса;  
б) коэффициент расширения гипса в направлении, образующем равные углы с главными направлениями теплового расширения.

2. Найти строение тензора пьезоэлектрических модулей для кристаллов, обладающих следующими элементами симметрии:

- а) плоскостью симметрии;
- б) осью симметрии третьего порядка;
- в) осью симметрии четвертого порядка;
- г) осью симметрии шестого порядка;
- д) допускающих циклическую перестановку осей.

3. Найти строение тензора пьезоэлектрических модулей для кристаллов, принадлежащих к следующим кристаллическим системам:

- а) кубической (имеющей три взаимно перпендикулярные оси четвертого порядка);
- б) ромбической (имеющей три взаимно перпендикулярные оси второго порядка).

4. Найти уравнение характеристической поверхности тензора пьезоэлектрических модулей

- а) для кристаллов, имеющих ось симметрии второго порядка;
- б) для кристаллов, указанных в задаче 2;
- в) для кристаллов, указанных в задаче 3.

5. Найти строение тензора модулей упругости для кристаллов, обладающих следующими элементами симметрии:

- а) осью симметрии третьего порядка;
- б) осью симметрии четвертого порядка;
- в) осью симметрии шестого порядка;
- г) допускающих циклическую перестановку осей.

6. Найти строение тензора модулей упругости для кристаллов, принадлежащих к следующим кристаллическим системам:

- а) кубической;
- б) ромбической.

## ГЛАВА VII

### ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

#### § 1. Тензорное поле и его дифференцирование

1. До сих пор при рассмотрении тензоров в евклидовом пространстве  $E_3$  мы не задумывались над тем, в какой точке заданы тензоры. Можно считать, что все введенные нами операции над тензорами осуществлялись в одной точке, но можно считать также, что все эти операции осуществлялись в некоторой области  $\mathcal{U}$  пространства  $E_3$  (или даже во всем  $E_3$ ), если считать, что изучаемые тензоры одинаковы во всех точках области  $\mathcal{U}$ .

В настоящей главе мы перейдем от тензорной алгебры к тензорному анализу. В связи с этим будем рассматривать тензорные поля, для которых, кроме изученных выше алгебраических операций, будет определена еще одна операция — дифференцирование.

В § 1 мы построим тензорный анализ в трехмерном евклидовом пространстве  $E_3$  в прямоугольной декартовой системе координат и в § 2 рассмотрим некоторые его приложения. Затем, в §§ 3, 4, 5, мы введем криволинейные координаты в  $E_3$  и построим тензорный анализ в криволинейных, но по-прежнему ортогональных системах координат.

2. Перейдем теперь к определению тензорного поля. Будем говорить, что в области  $\mathcal{U} \subset E_3$  (запись  $\mathcal{U} \subset E_3$  означает, что область  $\mathcal{U}$  принадлежит пространству  $E_3$ ) задано тензорное поле, если каждой точке  $M \in \mathcal{U}$  поставлен в соответствие тензор одной и той же валентности. Этот тензор называется тензором поля. Он, вообще говоря, меняется от точки к точке. Пусть, например, валентность заданного тензорного поля равна трем, тогда тензор  $a_{ijk}$  будет

функцией точки  $M$  (или радиуса-вектора этой точки):

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M),$$

или

$$a_{ijk} = a_{ijk}(x_1, x_2, x_3),$$

где  $x_1, x_2, x_3$  — координаты точки  $M$  относительно некоторого прямоугольного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

Будем считать в дальнейшем, что функции, задающие тензорное поле, непрерывны и имеют непрерывные частные производные любого нужного нам порядка по всем аргументам.

Теперь можно сказать, что в предыдущих главах мы рассматривали *однородные* тензорные поля, т. е. такие поля, тензор которых не меняется от точки к точке.

Приведем несколько примеров тензорных полей.

а) *Скалярное поле*. Так называется поле тензора нулевой валентности. Мы знаем, что такой тензор является инвариантом. Поэтому для задания скалярного поля надо в каждой точке  $M \in \mathcal{U}^0$  задать инвариант  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi(M),$$

или

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

т. е. скалярное поле задается некоторой функцией трех переменных.

Укажем некоторые конкретные скалярные поля: поле температур неравномерно нагретого тела, поле плотностей неоднородного тела, поле давлений газа и т. д.

б) *Векторное поле*. Так называют поле тензора первой валентности:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3), \quad (1)$$

поскольку, как мы знаем (гл. II, стр. 53), компоненты тензора первой валентности являются координатами вектора

$$a = a_i e_i.$$

Равенства (1) показывают, что векторное поле задается уже тремя функциями от трех аргументов.

Укажем несколько примеров векторных полей: поле вектора скорости (или ускорения) движущейся жидкости или газа, поле вектора плотности электрического тока в некотором

проводнике большого сечения, поле сил тяготения, создаваемых каким-нибудь массивным телом, и т. д.

в) Поле двухвалентного тензора:

$$a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, x_3).$$

Здесь поле задается уже девятью функциями от трех аргументов. Конкретными примерами таких полей могут служить поле напряжений и поле деформаций твердого тела (ср. гл. VI, § 3, где рассмотрены однородные поля напряжений и деформаций).

Отметим, что в приложениях обычно встречаются именно тензорные поля, а не отдельные тензоры.

Алгебраические операции над тензорами, построенные в § 4 гл. II для тензоров, определенных в одной точке, естественным образом переносятся и на тензорные поля: *надо считать, что эти операции производятся над тензором поля в каждой точке*  $M \in \mathcal{U}^0$ .

Например, если в области  $\mathcal{U}^0$  даны тензорные поля -

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M),$$

$$b_{ijk} = b_{ijk}(M),$$

$$c_{ij} = c_{ij}(M),$$

то, складывая компоненты тензоров первых двух полей в каждой точке  $M \in \mathcal{U}^0$ , мы получим в  $\mathcal{U}^0$  новое тензорное поле

$$m_{ijk}(M) = a_{ijk}(M) + b_{ijk}(M),$$

являющееся суммой двух первых полей, а перемножая в каждой точке  $M \in \mathcal{U}^0$  компоненты первого и третьего тензорных полей, получим новое тензорное поле

$$n_{ijklm}(M) = a_{ijk}(M) c_{lm}(M)$$

— произведение первого и третьего тензорных полей.

Аналогично можно рассмотреть операции свертывания тензорных полей и перестановки индексов в данном тензорном поле, производя эти операции над тензорами заданных полей в каждой точке  $M \in \mathcal{U}^0$ .

3. В тензорном поле кроме алгебраических операций можно определить еще операцию дифференцирования — основную операцию тензорного анализа. Эту операцию можно ввести следующим образом.

Пусть, например, в области  $\mathcal{V} \subset E_3$  дано поле тензора третьей валентности

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M). \quad (2)$$

Выясним, как меняется этот тензор при переходе из точки  $M(x_1, x_2, x_3)$  в бесконечно близкую к  $M$  точку  $M'$ . Положение точки  $M'$  относительно точки  $M$  определяется вектором  $dx = \overline{MM'}$ , разложение которого по базисным векторам записывается в виде

$$dx = dx_i e_i.$$

При переходе к новому ортонормированному базису  $e_{i'} = \gamma_{i'i} e_i$  координаты вектора  $dx$  преобразуются по формулам

$$dx_{i'} = \gamma_{i'i} dx_i.$$

Так как  $\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{MM'}$ , то компоненты  $x'_i$  точки  $M'$  теперь выразятся так:

$$x'_i = x_i + dx_i.$$

Обозначим через  $\Delta a_{ijk}$  приращения, которые получают компоненты тензора  $a_{ijk}$  при переходе из точки  $M$  в точку  $M'$ . Если предположить, что эти компоненты являются дифференцируемыми функциями от координат точки  $M$ , то главные части приращений могут быть записаны так:

$$da_{ijk} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} dx_l. \quad (3)$$

Докажем, что совокупность величин  $da_{ijk}$  образует тензор третьей валентности. Действительно, при переходе к базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$  компоненты тензора  $a_{ijk}$  преобразуются по формулам

$$a_{i'j'k'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{k'k} a_{ijk}.$$

Дифференцируя их почленно и учитывая, что величины  $\gamma_{i'i}$  постоянны (они не зависят от положения точки  $M$ , так как являются косинусами углов между векторами старого и нового базисов), мы получим

$$da_{i'j'k'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{k'k} da_{ijk}.$$

Эти равенства показывают, что величины  $da_{ijk}$  при замене базиса преобразуются по тензорному закону. Тензор с

координатами  $da_{ijk}$  назовем абсолютным дифференциалом тензора поля  $a_{ijk}$ .

Теперь формулы (3) показывают, что при свертывании величин  $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$  с координатами произвольного вектора  $dx_l$  получается тензор  $da_{ijk}$ . В силу обратного тензорного признака (стр. 69) отсюда следует, что величины  $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$  образуют тензор четвертой валентности в точке  $M$ .

Поскольку наши построения можно провести в любой точке  $M \in \mathcal{U}^p$ , мы получаем в  $\mathcal{U}^p$  новое тензорное поле, называемое *абсолютной производной тензорного поля  $a_{ijk}$* . Для абсолютной производной тензора поля  $a_{ijk}$  применяется обозначение

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = a_{ijk, l}$$

в котором в качестве добавочного индекса  $l$  на последнем месте ставится индекс той координаты  $x_l$  точки  $M$ , по которой производится дифференцирование, причем этот индекс от остальных отделяется запятой.

Перепишем формулы (3) в новых обозначениях:

$$da_{ijk} = a_{ijk, l} dx_l. \quad (3')$$

Эти формулы показывают, что абсолютный дифференциал тензора  $a_{ijk}$  есть результат свертывания тензора  $dx_l$  и абсолютной производной  $a_{ijk, l}$  этого тензора.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для тензорного поля любой валентности. *Совокупность всех частных производных первого порядка от компонент данного тензорного поля по координатам  $x_l$  той точки, в которой рассматривается тензорное поле, образует тензор, валентность которого на единицу больше валентности исходного тензорного поля, — абсолютную производную данного поля. Результат свертывания этой абсолютной производной по индексу, который возникает при дифференцировании, с координатами вектора  $dx$  представляет собой абсолютный дифференциал заданного векторного поля.*

Сделаем еще три замечания.

**Замечание 1.** Поскольку в прямоугольной декартовой системе координат координаты абсолютного дифференциала и

абсолютной производной тензорного поля совпадают с обычными дифференциалами и частными производными компонент исходного поля, правила абсолютного дифференцирования будут точно такими же, как правила обычного дифференцирования.

Замечание 2. Точно так же, как были построены абсолютный дифференциал и абсолютная производная первого порядка для произвольного тензорного поля, можно построить абсолютный дифференциал и абсолютную производную второго порядка, а затем и высших порядков для этого поля. Например, для тензорного поля  $a_{ijk}$  частные производные

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_m \partial x_l} = a_{ijk, lm}$$

образуют вторую абсолютную производную тензора  $a_{ijk}$ , которая является тензором пятой валентности. Результат свертывания этого тензора с дифференциалами  $dx_l$  и  $dx_m$  приведет к выражению для второго абсолютного дифференциала тензора  $a_{ijk}$ :

$$d^2 a_{ijk} = a_{ijk, lm} dx_l dx_m.$$

Вообще, абсолютный дифференциал порядка  $p$  от произвольного, не менее чем  $p$  раз дифференцируемого тензорного поля представляет собой тензорное поле той же валентности, что и исходное поле, а его абсолютная производная порядка  $p$  — тензорное поле, валентность которого на  $p$  единиц больше валентности исходного поля.

Замечание 3. Предположим, что функции, определяющие тензорное поле, имеют непрерывные частные производные  $(n+1)$ -го порядка в точке  $M(x_1, x_2, x_3)$  и ее окрестности. Тогда в окрестности точки  $M$  эти функции могут быть разложены по формуле Тейлора. Полученное разложение будем называть *разложением тензора по формуле Тейлора*. Для тензорного поля  $a_{ijk}$  это разложение запишется так:

$$\begin{aligned} a_{ijk}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) = & a_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \\ & + da_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2!} d^2 a_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \dots + \\ & + \frac{1}{n!} d^n a_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} a_{ijk}(x_1 + \theta_{ijk} \Delta x_1, x_2 + \theta_{ijk} \Delta x_2, x_3 + \theta_{ijk} \Delta x_3), \end{aligned}$$



или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned}
 a_{ijk}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) = & a_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \\
 + & a_{ijk, l_1}(x_1, x_2, x_3) \Delta x_{l_1} + \frac{1}{2!} a_{ijk, l_1 l_2}(x_1, x_2, x_3) \Delta x_{l_1} \Delta x_{l_2} + \\
 + & \dots + \frac{1}{n!} a_{ijk, l_1 l_2 \dots l_n}(x_1, x_2, x_3) \Delta x_{l_1} \dots \Delta x_{l_n} + \\
 + & \frac{1}{(n+1)!} a_{ijk, l_1 l_2 \dots l_n l_{n+1}}(x_1 + \theta_{ijk} \Delta x_1, x_2 + \theta_{ijk} \Delta x_2, x_3 + \\
 + & \theta_{ijk} \Delta x_3) \Delta x_{l_1} \dots \Delta x_{l_n} \Delta x_{l_{n+1}}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta x_i = dx_i$  и  $0 < \theta_{ijk} < 1$ , причем  $\theta_{ijk}$ , вообще говоря, различны для разных наборов  $i, j, k$ . Важно заметить, что коэффициенты в каждой группе членов этой формулы являются тензорами: это компоненты тензоров  $a_{ijk, l_1}, a_{ijk, l_1 l_2}, \dots$ , вычисленные в точке  $M$ .

4. Рассмотрим дифференцирование скалярного поля — поля тензора нулевой валентности:

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3).$$

Согласно общему правилу абсолютная производная этого поля

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

является тензором первой валентности, который, как известно, определяет векторное поле. Это поле называется *градиентом* скалярного поля и обозначается  $\text{grad } \varphi$ :

$$\text{grad } \varphi = \varphi_{,i} e_i.$$

Поскольку новое поле есть *поле одновалентного тензора*, его инвариантный смысл не вызывает сомнения. Из курса высшей математики (см., например, [2], стр. 427) известно, что градиент скалярного поля в данной точке  $M$  — это вектор, в направлении которого скалярное поле возрастает с наибольшей скоростью и модуль которого равен этой наибольшей скорости.

Приведем некоторые примеры скалярных полей и их градиентов.

а) Если имеется скалярное поле температуры

$$T = T(M)$$

неравномерно нагретого изотропного тела, то вектор

$$\mathbf{h} = -k \operatorname{grad} T$$

выражает плотность теплового потока, идущего от более нагретых частей тела к менее нагретым его частям; здесь  $k$  — постоянный множитель, называемый *коэффициентом теплопроводности* (ср. стр. 226). Тепловой поток в каждой точке тела идет по направлению вектора  $\mathbf{h}$ , причем через ортогональную  $\mathbf{h}$  площадку  $dS$  за одну секунду проходит  $|\mathbf{h}| dS$  единиц тепла.

б) Если имеется скалярное поле давлений

$$P = P(M)$$

в различных точках идеальной жидкости, заполняющей некоторый объем  $V$ , то вектор

$$d\mathbf{F} = -\operatorname{grad} P \cdot dV$$

дает равнодействующую сил давления, приложенных к элементу объема  $dV$ .

в) В электростатике напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля, т. е. сила, действующая на единицу заряда положительного электричества, как установлено опытом, равна

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

где  $\varphi$  — потенциал электрического поля. Если поле порождается положительным зарядом  $e$ , помещенным в начало координат, то по закону Кулона

$$\mathbf{E} = \frac{e}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор данной точки. Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{e}{|\mathbf{r}|}.$$

5. Применим теперь полученные в этом параграфе результаты и условия Сильвестра положительной и отрицательной определенности квадратичной формы (гл. IV, стр. 167, 169) для вывода достаточных условий экстремума функции двух и трех переменных. Заметим, что в курсе высшей математики для технических вузов эти условия обычно сообщаются без доказательства и то только для случая функции двух переменных (см., например, [2], стр. 413).

Пусть функция

$$u = u(x_1, x_2, x_3)$$

определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности некоторой точки  $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ , и пусть эта точка является *стационарной*, т. е. в ней

$$\frac{\partial u(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Тогда, чтобы выяснить, достигается ли в стационарной точке экстремум, воспользуемся формулой Тейлора (4), записав ее для тензорного поля  $u(x_1, x_2, x_3)$  нулевой валентности. Обозначим

$$u_{,ij}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \frac{\partial^2 u(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{\partial x_j \partial x_i} = a_{ij} \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Если учесть условие стационарности (5), то, пользуясь формулой Тейлора, приращение функции  $u(x_1, x_2, x_3)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3) - u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \\ &= \frac{1}{2!} a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + [3]; \end{aligned}$$

здесь  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ , а через [3] обозначены члены не менее третьего порядка малости.

Так как при малых  $|\Delta x_i|$  члены третьего порядка значительно меньше членов второго порядка, то знак всей правой части определяется знаком квадратичной формы

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta x, \Delta x) &= a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j = a_{11}(\Delta x_1)^2 + a_{22}(\Delta x_2)^2 + a_{33}(\Delta x_3)^2 + \\ &+ 2a_{12}\Delta x_1\Delta x_2 + 2a_{13}\Delta x_1\Delta x_3 + 2a_{23}\Delta x_2\Delta x_3. \end{aligned}$$

Если эта форма будет положительно определенной, то  $\Delta u > 0$ ,

$$u(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3) > u(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

и в точке  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  функция  $u(x_1, x_2, x_3)$  имеет минимум. Если же эта форма отрицательно определена, то  $\Delta u < 0$ ,

$$u(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3) < u(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

и в точке  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  будет максимум.

Что касается необходимых и достаточных условий положительной и отрицательной определенности формы  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$ , то они нам известны — это условия Сильвестра (гл. IV, стр. 167, 169). Таким образом, *достаточными условиями того, чтобы в стационарной точке  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  функции  $u(x_1, x_2, x_3)$  достигался минимум или максимум, будут соответственно условия*

$$\begin{aligned} \alpha) \quad a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0; \\ \beta) \quad a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Если ни условие  $\alpha$ ), ни условие  $\beta$ ) не выполнены, то возможны два случая: или форма  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$  — *неопределенная*, т. е. принимает в окрестности стационарной точки значения разных знаков, или же она является *полуопределенной*, т. е. принимает значения одного знака, но обращается в нуль не только при  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$  (в частности, она может быть тождественно равна нулю).

В первом случае в стационарной точке экстремума не будет, а во втором — экстремум может быть, а может и не быть: в этом случае надо исследовать аналогичным образом члены третьего порядка формулы Тейлора при тех значениях  $\Delta x_i$ , при которых члены второго порядка обращаются в нуль (в частности, при любых  $\Delta x_i$ , когда все частные производные второго порядка в стационарной точке равны 0).

**З а м е ч а н и е.** Для функции  $u(x)$  одного переменного квадратичная форма  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$  сводится к одному члену

$$u''(x_0) \Delta x^2,$$

где  $x_0$  — стационарная точка. Эта форма будет положительно определенной при  $u''(x_0) > 0$  и отрицательно определенной при  $u''(x_0) < 0$ . В первом случае функция  $u(x)$  в точке  $x_0$  будет иметь минимум, а во втором — максимум.

Для функции  $u(x_1, x_2)$  двух переменных исследование ее поведения в окрестности стационарной точки  $M_0(x_1^0, x_2^0)$  сводится к исследованию квадратичной формы от двух

переменных  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$ :

$$\Phi(\Delta x, \Delta x) = a_{11}(\Delta x_1)^2 + 2a_{12}\Delta x_1\Delta x_2 + a_{22}(\Delta x_2)^2,$$

где снова  $a_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_{M_0}$ . Критерий Сильвестра показывает, что исследуемая функция имеет в точке  $M_0$  минимум, если

$$a_{11} > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

и максимум, если

$$a_{11} < 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Если  $M_2 < 0$ , то квадратичная форма  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$  является неопределенной и функция  $u(x_1, x_2)$  не имеет экстремума в точке  $M_0$ . Если же  $M_2 = 0$ , то форма  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$  — полуопределенная и для выяснения вопроса о наличии экстремума в точке  $M_0$  необходимо дальнейшее исследование.

6. Рассмотрим теперь дифференцирование векторного поля — тензорного поля первой валентности:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3).$$

Абсолютная производная этого поля равна

$$a_{i,k} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}.$$

Полученный тензор второй валентности  $a_{i,k}$  иногда называют *градиентом векторного поля*.

Напишем теперь формулу, связывающую абсолютный дифференциал  $da_i$  и абсолютную производную  $a_{i,k}$ :

$$da_i = a_{i,k} dx_k, \quad (6)$$

где  $dx_k$  — координаты вектора  $dx = \overline{MM'}$ . Тензор второй валентности  $a_{i,k}$ , как мы знаем (гл. III, стр. 101), порождает линейное преобразование

$$y = Ax$$

или, в координатной форме,

$$y_i = a_{i,k} x_k.$$

Поэтому формулу (6) можно переписать в виде

$$da = A(M) dx. \quad (7)$$

Поскольку  $da \approx a(M') - a(M)$ , а  $dx = \overline{MM'}$ , то с точностью до бесконечно малых высшего порядка линейное преобразование  $A(M)$ , действуя на вектор бесконечно малого смещения  $\overline{MM'} = dx$ , дает соответствующее приращение векторного поля  $a(M)$ :

$$a(M') - a(M) = \Delta a(M) \approx A(M) dx. \quad (8)$$

Последнее соотношение показывает, что линейное преобразование  $A(M)$  определяет главную линейную часть приращения векторного поля  $a$  в точке  $M$ .

Рассмотрим след линейного преобразования  $A(M)$ :

$$\text{Sp } A(M) = a_{i,i}.$$

Так как производная  $a_{i,k}$  векторного поля есть тензор второй валентности, то этот след представляет собой инвариант, который называют *дивергенцией* векторного поля  $a$ :

$$a_{i,i} = \text{div } a.$$

Поле этого инварианта будет скалярным полем, определенным в той же области  $\mathcal{V}^3$ , в которой определено исходное векторное поле  $a$ . Так как инвариант  $\text{div } a$  получается из векторного поля  $a(M)$  в результате дифференцирования, то его называют *дифференциальным инвариантом* поля  $a(M)$ .

Рассмотрим еще вектор  $z$ , координаты которого получаются в результате свертывания тензора  $a_{i,j}$  с дискриминантным тензором  $-\varepsilon_{ijk}$ , а именно положим

$$z_i = -\varepsilon_{ijk} a_{j,k}. \quad (9)$$

Этот вектор  $z$  называется *ротором* векторного поля  $a$ :

$$z = \text{rot } a.$$

Расписывая подробно формулы (9) для координат вектора  $z$ , найдем

$$z_1 = (a_{3,2} - a_{2,3}) \varepsilon,$$

$$z_2 = (a_{1,3} - a_{3,1}) \varepsilon,$$

$$z_3 = (a_{2,1} - a_{1,2}) \varepsilon,$$

где величина  $\epsilon$  равна  $+1$  в правой и  $-1$  в левой системах координат. Мы видим отсюда, что *компоненты вектора  $\text{rot } \mathbf{a}$  с точностью до множителя  $\epsilon$  совпадают с компонентами удвоенного альтернированного тензора  $a_{i,k}$* . Таким образом, с векторным полем  $\mathbf{a}(M)$ , определенным в области  $\mathcal{V}$ , инвариантно связывается новое векторное поле — поле вектора  $\text{rot } \mathbf{a}$ , определенное в той же области  $\mathcal{V}$ .

Дивергенция и ротор векторного поля являются основными понятиями векторного анализа. При обычном изложении векторного анализа (см., например, [2], стр. 519) необходимо доказательство инвариантности этих полей. В данном же случае инвариантность непосредственно вытекает из тензорной природы этих понятий.

Напомним еще, что векторное поле  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$  называется *соленоидальным* в области  $\mathcal{V}$ , если в этой области  $\text{div } \mathbf{a} = 0$ ; векторное поле называется *безвихревым* в  $\mathcal{V}$ , если в ней  $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ .

Найдем, наконец, дивергенцию векторного поля, являющегося градиентом некоторого скалярного поля  $\varphi(M)$ :

$$\mathbf{a} = \text{grad } \varphi = \varphi_{,i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

Для определения дивергенции векторного поля  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ , как мы знаем, надо взять производную этого векторного поля  $a_{i,k}$  и свернуть его по индексам  $i$  и  $k$ . Но  $a_{i,k} = \varphi_{,ik}$ , поэтому

$$\text{div } \mathbf{a} = \varphi_{,ii} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}.$$

Оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

называется *оператором Лапласа* (или «лапласианом»). С помощью этого оператора дивергенция векторного поля  $\text{grad } \varphi$  может быть записана в виде

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \Delta \varphi.$$

Если скалярное поле  $\varphi(M)$  удовлетворяет условию

$$\Delta \varphi = 0,$$

то оно называется *гармоническим* (или *лапласовым*) *полем*. Уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0,$$

которому удовлетворяет определяющая такое поле функция  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ , называется *уравнением Лапласа*. Функция  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ , удовлетворяющая этому уравнению, называется *гармонической*.

7. До сих пор мы изучали тензорные поля, тензоры которых зависят от положения точки в пространстве, но не зависят от момента времени, в который рассматривается это поле. Такие тензорные поля называются *стационарными*. Если же тензор поля зависит не только от положения точки в пространстве, но и от времени, то поле называется *нестационарным*. Компоненты нестационарного тензорного поля будут функциями координат  $x_i$  точки  $M$  и времени  $t$ . Например, для трехвалентного тензорного поля эта зависимость запишется так:

$$a_{ijk} = a_{ijk}(x_1, x_2, x_3, t).$$

Скорость изменения тензорного поля во времени в некоторой неподвижной точке  $M$  будет описываться частными производными  $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial t}$ , которые, как легко видеть, снова образуют тензорное поле той же валентности, что и исходное поле. Предположим теперь, что нестационарное тензорное поле  $a_{ijk}$  описывает некоторое свойство материальной среды, частицы которой находятся в движении. Определим, как изменятся компоненты тензора  $a_{ijk}$ , связанные с некоторой фиксированной частицей, при ее движении. Пусть траектория движения этой частицы описывается уравнениями

$$x_i = x_i(t).$$

Тогда скорость изменения компонент тензора  $a_{ijk}$ , связанных с частицей, будет равна

$$\frac{da_{ijk}}{dt} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt}.$$



Но  $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = a_{ijk,l}$ , а  $\frac{dx_l}{dt}$  — компоненты скорости частицы движущейся материальной среды, которые мы обозначим через  $v_l$ . Тогда предыдущая формула перепишется так:

$$\frac{da_{ijk}}{dt} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial t} + a_{ijk,l} v_l. \quad (10)$$

Первый член правой части этого соотношения описывает изменение компонент тензора  $a_{ijk}$  в неподвижной точке  $M$ , а второй член связан с движением частицы в пространстве. Он называется *переносным членом*.

Очевидно, что формулы вида (10) будут иметь место для нестационарных тензорных полей любой валентности. Для скалярного поля  $\varphi = \varphi(M, t)$  эта формула примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi_{,i} v_i. \quad (11)$$

Если обозначить вектор скорости частицы через  $\mathbf{v}$ , то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varphi.$$

Для нестационарного векторного поля  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M, t)$  формула, аналогичная формуле (10), выглядит так:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + a_{i,k} v_k.$$

Последняя формула равносильна соотношению

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{A}(M) \mathbf{v},$$

где  $\mathbf{A}(M)$  — линейное преобразование, определяемое тензором  $a_{i,k}$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти экстремумы следующих функций от двух и трех переменных:

а)  $u = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3a x_1 - 3b x_2$ ;

б)  $u = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1 x_2 - 2x_2^2$ ;

в)  $u = e^{-x_1^2 - x_2^2} (a x_1^2 + b x_2^2)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;

г)  $u = \cos x_1 \cos x_2 \cos(x_1 + x_2)$ ,  $0 \leq x_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq x_2 \leq \pi$ ;

д)  $u = x_1 x_2 x_3 (4a - x_1 - x_2 - x_3)$ ;

$$\text{е) } u = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0;$$

$$\text{ж) } u = (ax_1 + bx_2 + cx_3) e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}.$$

2. Доказать следующие формулы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{grad}(\varphi + \psi) &= \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi, \quad \operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}, \\ \Delta(\varphi + \psi) &= \Delta \varphi + \Delta \psi, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \\ &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{b}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi, \\ \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a};$$

в)  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$ , где последнее слагаемое означает вектор, координаты которого получаются применением оператора Лапласа к соответствующим координатам вектора  $\mathbf{a}$ ;

г)  $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$ ,  $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} +$   
 $+ \mathbf{A} \mathbf{b} - \mathbf{B} \mathbf{a}$ ,  $\operatorname{grad}(\mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} + \mathbf{A} \mathbf{b} + \mathbf{B} \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — линейные преобразования с матрицами  $(a_{i,k})$  и  $(b_{i,k})$ ;

$$\text{д) } \operatorname{grad} \varphi[f(\mathbf{r})] = \frac{\partial \varphi}{\partial f} \operatorname{grad} f, \quad \text{где } \mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i.$$

3. Пусть  $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ,  $r = \sqrt{x_i x_i}$ ,  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  — постоянные векторные поля и  $\alpha$  — константа. Доказать, что

$$\text{а) } \operatorname{grad} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \operatorname{grad} r^n = n r^{n-2} \mathbf{r}, \quad \operatorname{grad} \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r},$$

$$\operatorname{grad}(c \mathbf{r}) = c, \quad \operatorname{grad}(c \times \mathbf{r})^2 = 2c^2 - 2c(c \mathbf{r});$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \operatorname{div}(\alpha \mathbf{r}) &= 3\alpha, \quad \operatorname{div}(c \times \mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2}{r}, \quad \operatorname{div}(c \mathbf{r}) = \frac{c \mathbf{r}}{r}, \\ \operatorname{div}(c r^2) &= 2c \mathbf{r}, \quad \operatorname{div}(r^4 \cdot \mathbf{r}) = r^4, \quad \operatorname{div}[c_2(r c_1)] = c_1 c_2, \quad \operatorname{div}[\mathbf{r}(r c)] = \\ &= 4r c, \quad \operatorname{div}[\mathbf{r}(c \times \mathbf{r})] = 0, \quad \operatorname{div}[c_1 \times (r \times c_2)] = 2c_1 c_2, \quad \operatorname{div}[\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r})] = \\ &= 3\varphi + r \varphi'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \operatorname{rot} \mathbf{r} &= 0, \quad \operatorname{rot}[\mathbf{r}(c \mathbf{r})] = c \times \mathbf{r}, \quad \operatorname{rot}[c_2(r c_1)] = c_1 \times c_2, \\ \operatorname{rot}(c \times \mathbf{r}) &= 2c, \quad \operatorname{rot}(r c) = \frac{\mathbf{r} \times c}{r}, \quad \operatorname{rot}[\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r})] = 0. \end{aligned}$$

4. а) Воспользовавшись тем, что эллипс  $r_1 + r_2 = 2a$  есть линия уровня функции  $\varphi = r_1 + r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния переменной точки  $M$  эллипса до его фокусов  $F_1$  и  $F_2$ , доказать, что углы наклона прямых  $F_1 M$  и  $F_2 M$  к касательной эллипса в точке  $M$  равны.

б) Решить аналогичную задачу для гиперболы  $r_1 - r_2 = 2a$  и параболы  $r - x = p$ , фокус которой помещен в начале координат.

5. Найти дивергенцию и ротор поля скоростей  $\mathbf{v}$  и ускорений  $\mathbf{w}$  твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, если известно, что:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  — постоянные векторы.

6. Доказать, что векторное поле

$$\mathbf{a} = x_1 x_2^2 x_3^2 \mathbf{e}_1 + x_1^2 x_2 x_3^2 \mathbf{e}_2 + x_1^2 x_2^2 x_3 \mathbf{e}_3$$

является безвихревым.

Векторное поле  $\mathbf{a}$  ( $M$ ) называется *потенциальным* в области  $\Omega$ , если в этой области существует такое скалярное поле  $\varphi$ , что  $\mathbf{a} = \text{grad } \varphi$ .

7. Доказать, что

а) всякое потенциальное поле является безвихревым;

б) всякое безвихревое поле является потенциальным.

8. Доказать, что  $\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ , если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — потенциальные векторные поля.

9. Показать, что гармоническое поле одновременно является и потенциальным и соленоидальным.

10. Доказать, что следующие функции являются гармоническими:

а)  $u = a_i x_i + a$ ;

б)  $u = a(x_1^2 - x_2^2)$ ;

в)  $u = a\left(x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2\right)$ ;

г)  $u = ax_1 x_2 x_3$ ;

д)  $u = \frac{1}{r}$ , где  $r = \sqrt{x_i x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

е)  $u = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , где  $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ .

## § 2. Механика деформируемой среды

1. Применим аппарат, построенный в § 1, для изучения механики деформируемой среды.

Рассмотрим некоторую сплошную среду — газ, жидкость, пластичное или упругое тело, которое движется в пространстве, испытывая при этом деформации. Пусть в начальный момент времени эта среда заполняла некоторый объем  $V$  и  $\mathbf{x}_0$  — радиус-вектор некоторой ее точки  $M_0$  в начальный момент. С течением времени точка  $M_0$  переместилась в пространстве и заняла новое положение  $M$ . Если обозначить радиус-вектор точки  $M$  через  $\mathbf{x}$ , то будем иметь

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), \quad (1)$$

где в правой части стоит векторная функция  $\mathbf{x}$  векторного аргумента  $\mathbf{x}_0$  и времени  $t$ , непрерывная и дифференцируемая необходимое число раз по всем своим аргументам и удовлетворяющая условию

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0.$$

Если точка  $M_0$  фиксирована, то уравнение (1) представляет собой уравнение движения этой точки при изменении времени. Наоборот, если фиксировано время  $t$ , то уравнение (1) описывает то новое положение точек рассматриваемой деформируемой среды, которое они займут в момент времени  $t$ .

Обозначим через  $\mathbf{v}$  скорость точки  $M$  деформируемой среды. Тогда по определению

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}.$$

Вектор  $\mathbf{v}$  является функцией от начального положения точки  $M$ , определяемого вектором  $\mathbf{x}_0$ , и времени  $t$ . Но при фиксированном  $t$  можно считать, что вектор  $\mathbf{v}$  является функцией координат точки  $M$ , т. е.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(M).$$

Таким образом, в каждый момент времени с деформируемой сплошной средой связывается векторное поле — поле скоростей точек этой среды. Пусть  $v_i$  — координаты вектора  $\mathbf{v}$  по неподвижному базису  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , так что  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ .

Выделим в нашей сплошной среде малую окрестность некоторой ее точки  $M$ . Заполняющая эту окрестность среда, перемещаясь вместе со всей средой, испытывает некоторую деформацию и вращение. Рассмотрим движение всех частиц, содержащихся в выделенной окрестности, за бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$ . С точностью до бесконечно малых второго порядка относительно  $\Delta t$  можно считать, что перемещение частицы, расположенной в точке  $M$ , определяется вектором  $\mathbf{v}(M) \Delta t$ . Наряду с точкой  $M$  нашей окрестности рассмотрим еще какую-нибудь ее точку  $M'$  (рис. 20). При рассматриваемом смещении точки  $M$  и  $M'$  переходят соответственно в точки  $N$  и  $N'$ , причем

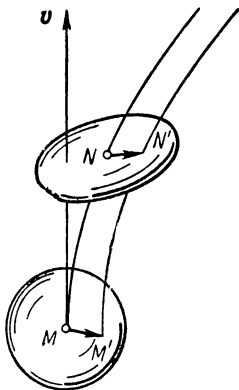


Рис. 20.

$$\overline{MN} = \mathbf{v}(M) \Delta t, \quad \overline{M'N'} \approx \mathbf{v}(M') \Delta t.$$

Обозначим через  $\mathbf{x}'$  радиус-вектор точки  $M'$ , и пусть  $\Delta \mathbf{x} = \overline{MM'}$ . Тогда вектор  $\overline{NN'}$ , в который переходит вектор  $\overline{MM'}$  при рассматриваемой деформации, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{NN'} &= \overline{NM} + \overline{MM'} + \overline{M'N'} = \overline{MM'} + (\overline{M'N'} - \overline{MN}) \approx \\ &\approx \Delta \mathbf{x} + [\mathbf{v}(M') - \mathbf{v}(M)] \Delta t.\end{aligned}$$

Но по формуле (8) предыдущего параграфа с точностью до бесконечно малых второго порядка относительно  $\Delta \mathbf{x}$  имеем

$$\mathbf{v}(M') - \mathbf{v}(M) \approx V(M) \Delta \mathbf{x},$$

где  $V(M)$  — линейное преобразование с матрицей

$$V(M) = (v_{i,j}),$$

составленной из производных координат вектора  $\mathbf{v}$  по координатам точки  $M$ . Поэтому предыдущее соотношение может быть переписано в виде

$$\overline{NN'} \approx \Delta \mathbf{x} + V(M) \Delta t \Delta \mathbf{x}$$

или, если положить  $\overline{NN'} = \Delta \mathbf{y}$ ,

$$\Delta \mathbf{y} \approx [E + V(M) \Delta t] \Delta \mathbf{x}, \quad (2)$$

где  $E$  — тождественное преобразование пространства.

Равенство (2) означает, что вектор  $\overline{MM'} = \Delta \mathbf{x}$  переходит в вектор  $\overline{NN'} = \Delta \mathbf{y}$  посредством линейного преобразования  $E + V(M) \Delta t$ , где  $V(M)$  — линейное преобразование, определяемое тензором абсолютной производной векторного поля  $V(M)$ . Это означает, что малая окрестность каждой точки деформируемой среды с точностью до бесконечно малых величин второго порядка относительно  $\Delta \mathbf{x}$  и  $\Delta t$  испытывает однородную деформацию.

Запишем разложения векторов  $\Delta \mathbf{x}$  и  $\Delta \mathbf{y}$  по базисным векторам  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ :

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta x_i \mathbf{e}_i, \quad \Delta \mathbf{y} = \Delta y_i \mathbf{e}_i.$$

Тогда соотношение (2) в координатной форме переписывается так:

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + v_{i,j} \Delta t) \Delta x_j. \quad (3)$$

Сравнивая это равенство с соотношением (3) из предыдущей главы (стр. 242), заключаем, что тензор  $v_{i,j}\Delta t$  описывает полную деформацию бесконечно малой окрестности точки  $M$ . Используя обозначения стр. 242, запишем

$$e_{ij} = v_{i,j}\Delta t. \quad (4)$$

Но в отличие от предыдущей главы тензор  $e_{ij}$  не будет оставаться постоянным, а будет меняться от точки к точке. Это связано с тем, что теперь рассматривается неоднородная деформация сплошной среды.

Как вытекает из результатов § 3 гл. VI, симметричная часть тензора  $e_{ij}$  описывает чистую деформацию окрестности точки  $M$ , а кососимметричная его часть — вращение этой окрестности вокруг точки  $M$ . Тензор чистой бесконечно малой деформации  $\epsilon_{ij}$  теперь может быть записан в виде

$$\epsilon_{ij} = e_{(ij)} = v_{(i,j)}\Delta t. \quad (5)$$

Тензор

$$u_{ij} = v_{(i,j)} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

называется *тензором скоростей деформации*. Тензор  $\omega_{ij}$ , определяющий бесконечно малый поворот окрестности точки  $M$ , записывается так:

$$\omega_{ij} = e_{[ij]} = v_{[i,j]}\Delta t.$$

Ось, вокруг которой производится этот поворот, имеет направление вектора  $\omega$ , координаты которого, как было указано, связаны с компонентами тензора  $\omega_{ij}$  соотношениями

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk},$$

а угол поворота равен  $|\omega|$ . С тензором  $v_{i,j}$  вектор  $\omega$  связан так:

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}v_{[j,k]}\Delta t = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}v_{j,k}\Delta t$$

(в силу косої симметрии тензора  $\epsilon_{ijk}$  знак альтернирования тензора  $v_{j,k}$  может быть опущен). Но из формулы (9) предыдущего параграфа следует, что величины  $-\epsilon_{ijk}v_{j,k}$  являются координатами вектора  $\text{rot } v$ . Поэтому последняя формула

может быть переписана в виде

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \Delta t. \quad (6)$$

Отсюда становится ясным механический смысл ротора векторного поля  $\mathbf{v}$ : *если  $\mathbf{v}$  — поле мгновенных скоростей движущейся деформируемой среды, то векторное поле  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  представляет собой поле удвоенных угловых скоростей частиц этой среды.*

Полная деформация окрестности точки  $M$  определяется тензором  $\delta_{ij} + e_{ij}$ , который, как уже отмечалось в гл. VI, может быть представлен в виде

$$\delta_{ij} + e_{ij} = (\delta_{ik} + \omega_{ik})(\delta_{kj} + \varepsilon_{kj})$$

и, значит, состоит из чистой деформации и поворота вокруг точки  $M$ . Но, кроме того, окрестность точки  $M$  переносится параллельно, когда точка  $M$  переходит в положение  $N$ . Отсюда следует, что *бесконечно малое перемещение окрестности точки  $M$  деформируемой среды состоит из чистой деформации, определяемой тензором  $\varepsilon_{ij} = v_{(i, j)} \Delta t$ , бесконечно малого поворота, определяемого вектором  $\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \Delta t$ , и параллельного переноса, определяемого вектором  $\mathbf{v} \Delta t$ .*

Вычислим еще коэффициент объемного расширения деформируемой среды. Для случая однородной деформации этот коэффициент равен (гл. VI, стр. 245)

$$\mu = \varepsilon_{ii}.$$

Эта же формула остается справедливой и в общем случае, если применять ее к малой окрестности каждой рассматриваемой точки деформируемой среды. Пользуясь формулой (5) и учитывая, что  $v_{(i, i)} = v_{i, i}$ , перепишем последнее соотношение:

$$\mu = v_{i, i} \Delta t.$$

Но  $v_{i, i} = \operatorname{div} \mathbf{v}$ . Поэтому

$$\mu = \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \Delta t. \quad (7)$$

Последняя формула раскрывает механический смысл дивергенции векторного поля  $\mathbf{v}$ : *если  $\mathbf{v}$  — поле скоростей движущейся деформируемой среды, то  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  представляет собой скалярное поле скоростей объемного расширения этой среды.*

Теперь ясно, что условие несжимаемости деформируемой среды может быть записано в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Это означает, что поле скоростей несжимаемой среды является соленоидальным полем.

Заметим еще, что движение деформируемой среды называется *безвихревым*, если частицы жидкости при этом движении не вращаются. Из формулы (6) видно, что для того, чтобы движение деформируемой среды было безвихревым, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

т. е. чтобы поле скоростей этой среды было потенциальным.

2. Выведем теперь основные уравнения механики деформируемой среды. Пусть  $\rho = \rho(M, t)$  — плотность, а  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M, t)$  — скорость частицы среды, находящейся в точке  $M$  в момент времени  $t$ . Функции  $\rho$  и  $\mathbf{v}$  предполагаются непрерывными и достаточное число раз дифференцируемыми функциями своих аргументов. Выделим снова в нашей среде достаточно малую окрестность точки  $M$ . Тогда масса  $\Delta m$  этой окрестности с точностью до бесконечно малых величин высших порядков может быть вычислена по формуле

$$\Delta m \approx \rho(M) \Delta V,$$

где  $\Delta V$  — объем этой окрестности. При перемещении выделенной окрестности в пространстве, в соответствии с законом сохранения вещества, ее масса должна оставаться постоянной, т. е.

$$\frac{d}{dt}(\Delta m) \equiv \frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \frac{d}{dt}(\Delta V) = 0. \quad (8)$$

Но

$$\frac{d}{dt}(\Delta V) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V(N) - \Delta V(M)}{\Delta t},$$

где  $N$  — точка, в которую переместится точка  $M$  за время  $\Delta t$ . Числитель дроби, стоящей под знаком предела, следующим образом может быть выражен через коэффициент объемного расширения:

$$\Delta V(N) - \Delta V(M) \approx \mu(M) \Delta V(M)$$



или, в силу формулы (7),

$$\Delta V(N) - \Delta V(M) \approx \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \Delta V(M) \Delta t.$$

Подставляя это выражение под знак предела и совершая предельный переход, получим

$$\frac{d}{dt}(\Delta V) = \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \Delta V.$$

Если внести эту величину в соотношение (8) и сократить на  $\Delta V$ , то найдем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (9)$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности* и является первым основным уравнением механики деформируемой среды.

Уравнение (9) обычно записывают в несколько иной форме. Во-первых,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{i,i},$$

во-вторых, в силу формулы (11) предыдущего параграфа

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho, i v_i.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9), найдем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho, i v_i + \rho v_{i,i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0. \quad (10)$$

Последняя формула может быть переписана еще так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

3. Найдем второе основное уравнение механики деформируемой среды — уравнение движения. Для этого рассмотрим окрестность точки  $M$ , имеющую форму параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, и центром в точке  $M$ . Обозначим длину ребра этого параллелепипеда, параллельного базисному вектору  $\mathbf{e}_i$ , через  $2\Delta x_i$ , площадь

грани, перпендикулярной этому вектору, — через  $\Delta s_i$  и объем параллелепипеда — через  $\Delta V$ . Тогда

$$\Delta s_i = 4\Delta x_j \Delta x_k, \quad \Delta V = 8\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k.$$

Рассмотрим, какие силы действуют на элемент объема нашего тела, заключенный внутри выделенного параллелепипеда. Как уже указывалось (гл. VI, стр. 235), имеется два типа таких сил — объемные и поверхностные силы. Если обозначить через  $F$  величину объемной силы, отнесенной к единице массы, то на выделенный элемент объема будет действовать сила

$$F \Delta m = F \rho \Delta V.$$

Поверхностные силы, действующие на выделенный объем, связаны с теми напряжениями, которые возникают в деформируемой среде. Эти напряжения описываются тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ , который теперь не будет уже постоянным, как в гл. VI, а меняется от точки к точке, так что

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(M)$$

(конечно, компоненты тензора напряжений являются достаточно число раз дифференцируемыми функциями координат точки).

Пусть  $\sigma(M)$  — линейное преобразование, порождаемое тензором напряжений в точке  $M$ . Найдем силы, которые действуют на две параллельные грани выделенного параллелепипеда, например на грани, перпендикулярные вектору  $e_1$ . Пусть  $M'$  и  $M''$  — их центры, так что  $M' = M'(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3)$ ,  $M'' = M''(x_1 - \Delta x_1, x_2, x_3)$ . Тогда силы, действующие на правую и левую грани параллелепипеда, соответственно равны

$$\sigma(M') e_1 \Delta s_1 \quad \text{и} \quad \sigma(M'') (-e_1) \Delta s_1,$$

так как векторы  $e_1$  и  $-e_1$  являются внешними нормальями к этим граням. Сумма этих сил будет равна

$$\Delta p_1 = [\sigma(M') - \sigma(M'')] e_1 \Delta s_1 = [\sigma_{i1}(M') - \sigma_{i1}(M'')] e_i \Delta s_1.$$

Применяя к разностям, стоящим в скобках, теорему Лагранжа (см. [2], стр. 177), получим

$$\Delta p_1 = \sigma_{i1,1}(M_{1i}) e_i \cdot 2\Delta x_1 \Delta s_1 = \sigma_{i1,1}(M_{1i}) e_i \Delta V, \quad (11)$$

где точки  $M_{1i}$  принадлежат рассматриваемой окрестности точки  $M$ . Аналогично подсчитываются силы, действующие на остальные грани выделенного параллелепипеда.

Обозначим через  $\boldsymbol{w}$  ускорение, которое сообщают выделенной окрестности точки  $M$  действующие на нее силы. Тогда второй закон Ньютона для этой окрестности запишется в виде

$$\boldsymbol{w} \rho \Delta V = \boldsymbol{F} \rho \Delta V + \Delta \boldsymbol{p}_1 + \Delta \boldsymbol{p}_2 + \Delta \boldsymbol{p}_3.$$

Используя соотношение (11) и аналогичные ему выражения для  $\Delta \boldsymbol{p}_2$  и  $\Delta \boldsymbol{p}_3$  и сокращая на  $\Delta V$ , получим отсюда

$$\rho \boldsymbol{w} = \rho \boldsymbol{F} + [\sigma_{i1,1}(M_{1i}) + \sigma_{i2,2}(M_{2i}) + \sigma_{i3,3}(M_{3i})] \boldsymbol{e}_i,$$

где точки  $M_{1i}$ ,  $M_{2i}$ ,  $M_{3i}$  принадлежат рассматриваемой окрестности точки  $M$ . Перейдем теперь к пределу при  $\Delta x_i \rightarrow 0$ ; так как при этом все точки  $M_{ij} \rightarrow M$ , последнее выражение примет вид

$$\rho \boldsymbol{w} = \rho \boldsymbol{F} + (\sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3}) \boldsymbol{e}_i.$$

Теперь все величины, входящие в это соотношение, вычисляются в одной и той же точке  $M$ .

Обозначим через  $F_i$  координаты вектора  $\boldsymbol{F}$ . Так как  $\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ , то  $w_i = \frac{dv_i}{dt}$ . Выражение

$$\sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3} = \sigma_{ik,k}$$

есть свернутая абсолютная производная тензорного поля  $\sigma_{ik}$ . Поэтому предыдущее уравнение может быть записано в виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sigma_{ik,k}. \quad (12)$$

Это уравнение называется *уравнением движения* деформируемой среды. Вместе с уравнением (10) оно составляет систему основных уравнений механики деформируемой среды.

Отметим, что уравнения (10) и (12) записаны в инвариантной форме и поэтому не зависят от выбора прямоугольной декартовой системы координат пространства.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что уравнение движения сплошной среды может быть записано в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,k} v_k = F_i + \frac{1}{\rho} \sigma_{ik,k}.$$

Сплошная среда называется *идеальной жидкостью*, если для нее тензор напряжения является шаровым тензором:  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$ , где  $p = p(M, t)$  — давление жидкости.

2. Доказать, что уравнение движения идеальной жидкости может быть записано в следующих формах:

$$a) \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_{i,k} v_k;$$

$$б) \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} v_j z_k - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x_i},$$

где  $\mathbf{z} = z_k \mathbf{e}_k = \text{rot } \mathbf{v}$ ,  $v = |\mathbf{v}|$ ;

в) для однородной несжимаемой жидкости, определяемой условием  $\rho = c$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) = F_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} v_j z_k;$$

г) для однородной несжимаемой жидкости в потенциальном силовом поле  $\mathbf{F} = -\text{grad } U$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + U \right) = -\frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} v_j z_k;$$

д) для безвихревого движения однородной несжимаемой жидкости в потенциальном силовом поле

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + U,$$

где  $\varphi$  — потенциал векторного поля  $\mathbf{v}$ , так что  $\text{grad } \varphi = -\mathbf{v}$  (см. задачу 7 предыдущего параграфа).

3. Учитывая соотношение

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

которое связывает тензоры деформации и напряжения упругой изотропной среды (см. стр. 259), доказать, что уравнения движения такой среды в случае ее однородности ( $\lambda, \mu$  — постоянны) записываются в виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + [(\lambda + \mu) v_{k,ki} + \mu v_{i,kk}].$$

Сплошная среда называется *вязкой жидкостью*, если ее тензор напряжения имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij},$$

где  $\sigma'_{ij}$  — вязкий тензор напряжения, удовлетворяющий условию  $\sigma'_{ii} = 0$ .

4. Доказать, что уравнение движения вязкой жидкости имеет вид

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sigma'_{ik,k}.$$

### § 3. Ортогональные криволинейные системы координат

1. До сих пор положение точки в пространстве мы определяли ее радиусом-вектором  $\mathbf{x} = \overline{OM} = x_i \mathbf{e}_i$  относительно некоторого неподвижного ортонормированного базиса  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  с началом в точке  $O$ ; числа  $x_1, x_2, x_3$  — это прямоугольные декартовы координаты точки  $M$ .

Во многих случаях бывает полезно определять положение точки в пространстве не тремя декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$ , а какими-нибудь тремя другими числами  $u_1, u_2, u_3$ , которые более тесно связаны с рассматриваемой задачей. Будем предполагать, что не только каждой точке  $M$  соответствуют три числа  $u_1, u_2, u_3$ , но и, наоборот, каждой такой тройке чисел  $u_1, u_2, u_3$  соответствует определенная точка  $M$ . При этом иногда приходится ограничивать область изменения переменных  $u_1, u_2, u_3$ , чтобы достичь взаимной однозначности соответствия между точками и тройками чисел  $u_1, u_2, u_3$ .

Числа  $u_1, u_2, u_3$  называются *криволинейными координатами* точки  $M$  (основание для такого названия координат будет выяснено ниже).

Поскольку всякой точке  $M$  соответствуют координаты  $u_1, u_2, u_3$ , то каждая из этих координат является функцией от прямоугольных декартовых координат  $x_1, x_2, x_3$ :

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Но задание чисел  $u_1, u_2, u_3$  определяет положение точки  $M$ , и поэтому ее прямоугольные декартовы координаты  $x_1, x_2, x_3$  будут функциями от  $u_1, u_2, u_3$ :

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Как известно из курса математического анализа, для того чтобы соотношения (1) были разрешимы относительно  $x_1, x_2, x_3$ , т. е. чтобы из них можно было вывести формулу (2), необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \equiv \frac{\partial (u_1, u_2, u_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля:

$$\frac{\partial (u_1, u_2, u_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

Точно так же должен быть отличен от нуля и определитель

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right| \equiv \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (u_1, u_2, u_3)}.$$

В дальнейшем будем всюду предполагать неравенство нулю этих определителей и считать функции (1) и (2), определяющие связь между декартовыми и криволинейными координатами точки  $M$ , по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемыми.

2. Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла криволинейных координат. Рассмотрим уравнение

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = C_1,$$

где  $C_1 = \text{const}$ . Как известно, такое уравнение в пространстве определяет поверхность. При различных значениях  $C_1$  получаем некоторое семейство поверхностей. Если точка  $M$  имеет первой координатой  $u_1 = \alpha$ , то это значит, что она лежит на поверхности  $u_1(x_1, x_2, x_3) = \alpha$  этого семейства. Аналогично уравнения

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = C_2,$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = C_3$$

являются уравнениями двух других семейств поверхностей. Если точка  $M$  имеет координаты  $u_1, u_2, u_3$ , то это означает, что она лежит на определенных поверхностях этих трех

семейств, т. е. является пересечением трех поверхностей, взятых по одной из каждого семейства (рис. 21).

Указанное выше отличие от нуля определителя является гарантией того, что три поверхности из разных семейств пересекаются в одной и только в одной точке.

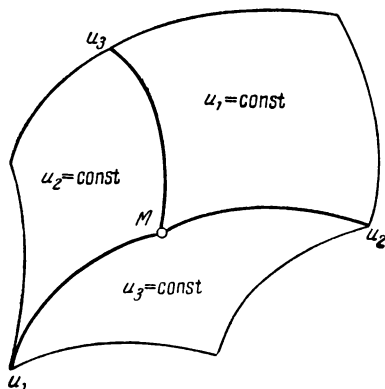


Рис. 21.

Назовем поверхности указанных трех семейств *координатными поверхностями* и для краткости будем называть их *u<sub>1</sub>-поверхностью*, *u<sub>2</sub>-поверхностью*, *u<sub>3</sub>-поверхностью*.

Если рассмотреть попарное пересечение поверхностей разных семейств, то получим *координатные линии*. Через каждую точку *M* проходят три координатные линии.

Вдоль координатной линии, которая является пересечением *u<sub>2</sub>-поверхности* и *u<sub>3</sub>-поверхности*, изменяется лишь координата *u<sub>1</sub>*, а *u<sub>2</sub>* и *u<sub>3</sub>* остаются постоянными. Эту координатную линию будем называть *линией u<sub>1</sub>*. Аналогично определяются координатные линии *u<sub>2</sub>* и *u<sub>3</sub>*. Легко видеть, что координатные линии будут, вообще говоря, кривыми линиями. Отсюда и происходит название «криволинейные координаты».

Найдем векторы, касательные к координатным линиям криволинейной системы координат, проходящим через некоторую точку *M*. Параметрические уравнения координатной линии *u<sub>1</sub>*, которая проходит через точку *M<sub>0</sub> (u<sub>i</sub><sup>0</sup>)*, записываются в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2^0, u_3^0).$$

Как известно из курса анализа (см. [2], стр. 229), касательным вектором к этой линии в точке *M<sub>0</sub>* будет вектор

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \right|_{M_0} \mathbf{e}_i,$$

который мы обозначим через  $\mathbf{x}_1^0$ . Точно так же касательными к линиям  $u_2$  и  $u_3$ , проходящим через точку  $M$ , будут векторы

$$\mathbf{x}_2^0 = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial u_2} \right|_{M_0} \mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{x}_3^0 = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial u_3} \right|_{M_0} \mathbf{e}_i.$$

Теперь легко видеть, что

$$(\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \mathbf{x}_3^0) = \left| \left. \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial u_k} \right|_{M_0} \right|$$

и неравенство нулю определителя, стоящего в правой части этого соотношения, равносильно линейной независимости векторов  $\mathbf{x}_1^0$ ,  $\mathbf{x}_2^0$  и  $\mathbf{x}_3^0$ .

3. Рассмотрим несколько примеров криволинейных систем координат.

а) Прямоугольная декартова система координат. Ее тоже можно рассматривать как частный случай криволинейной системы координат. Координатными поверхностями здесь служат плоскости, параллельные координатным плоскостям ( $x_1$ -поверхности — плоскости, параллельные плоскости  $\mathbf{e}_2\mathbf{Oe}_3$ , и т. д.). Координатными линиями служат прямые линии, параллельные осям координат (например, координатные линии  $x_1$  — прямые линии, параллельные  $\mathbf{e}_1$ , и т. д.).

б) Цилиндрическая система координат. Пусть в пространстве дана прямоугольная декартова система координат  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  с началом в  $O$ . Рассмотрим тройку чисел  $u_1, u_2, u_3$ , где  $u_1 \geq 0$ ,  $0 \leq u_2 < 2\pi$ , и поставим в соответствие этой тройке чисел такую точку  $M$ , что ее аппликата равна  $u_3$ , а проекция на плоскость  $\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_2$  имеет полярные координаты  $u_1$  и  $u_2$  (рис. 22). Очевидно, что при этом каждой тройке чисел  $u_1, u_2, u_3$  соответствует определенная точка  $M$

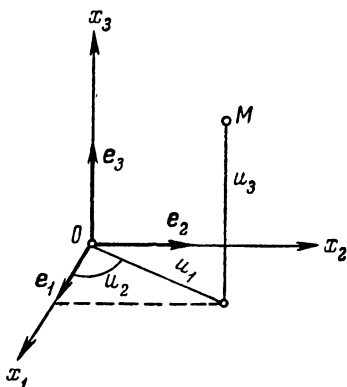


Рис. 22.



и, обратно, каждой точке  $M$  отвечает определенная тройка чисел таких, что

$$u_1 \geq 0, \quad 0 \leq u_2 < 2\pi, \quad -\infty < u_3 < \infty$$

(лишь в случае, если точка  $M$  лежит на оси  $Oe_3$ , координаты  $u_1$  и  $u_3$  определяются однозначно, а координата  $u_2$  неопределенна: ей можно приписать любое значение).

Введенные таким образом числа  $u_1, u_2, u_3$  называются *цилиндрическими координатами* точки  $M$ . (Обычно цилиндрические координаты обозначают буквами  $\rho, \varphi, z$ .) Легко видеть, что эти координаты связаны с прямоугольными декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$  точки  $M$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u_1 \cos u_2, \\ x_2 &= u_1 \sin u_2, \\ x_3 &= u_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и, обратно,

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \operatorname{tg} u_2 &= \frac{x_2}{x_1}, \\ u_3 &= x_3. \end{aligned} \right\}$$

Определитель  $\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right|$  в этом случае будет вычисляться следующим образом:

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right| = \begin{vmatrix} \cos u_2 & -u_1 \sin u_2 & 0 \\ \sin u_2 & u_1 \cos u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u_1.$$

Отсюда ясно, что этот определитель отличен от нуля всюду, за исключением прямой  $u_1 = 0$ , которая совпадает с осью  $e_3$ . На этой прямой, как мы видели выше, нарушается взаимная однозначность соответствия между точками и их цилиндрическими координатами.

Координатными поверхностями в цилиндрической системе координат служат:  $u_1$ -поверхностями — круговые цилиндры с общей осью  $e_3$ ;  $u_2$ -поверхностями — полуплоскости, ограниченные осью  $e_3$ ;  $u_3$ -поверхностями — плоскости, параллельные плоскости  $e_1 O e_2$ . Название «цилиндрическая система координат» как раз и объясняется тем, что среди ее координатных

поверхностей имеются цилиндрические поверхности. Координатными линиями в цилиндрической системе координат служат: линиями  $u_1$  — лучи, выходящие из произвольной точки оси  $e_3$  и параллельные плоскости  $e_1 O e_2$ ; линиями  $u_2$  — окружности с центром на оси  $e_3$ , расположенные в плоскостях, перпендикулярных  $e_3$ ; линиями  $u_3$  — прямые, параллельные оси  $e_3$  (рис. 23).

в) Сферическая система координат. Зададим три числа  $u_1, u_2, u_3$ , определяющие положение точки  $M$

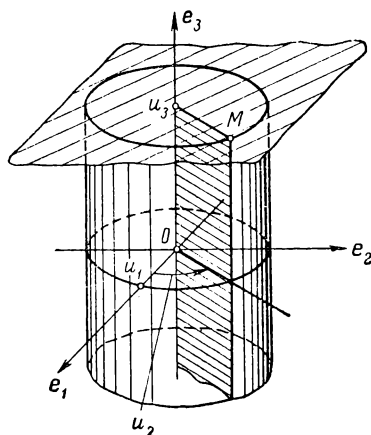


Рис. 23.

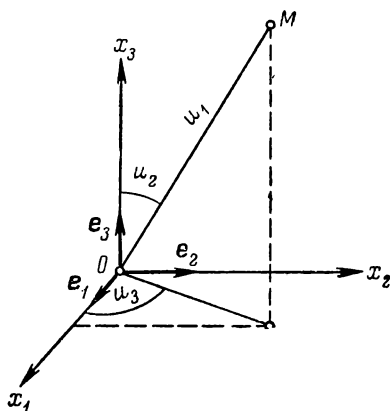


Рис. 24.

в пространстве, следующим образом:  $u_1$  — расстояние от начала координат  $O$  до точки  $M$ ,  $u_2$  — угол между вектором  $e_3$  и радиусом-вектором точки  $M$ ,  $u_3$  — угол между положительным направлением оси  $e_1$  и проекцией радиуса-вектора точки  $M$  на плоскость  $O e_1 e_2$  (рис. 24). Эти три числа называются *сферическими координатами* точки  $M$ . (Обычно сферические координаты обозначают буквами  $r, \theta, \varphi$ .)

Нетрудно видеть, что  $\frac{\pi}{2} - u_2$  и  $u_3$  — это географические широта и долгота точки  $M$  на сфере с центром в точке  $O$  и радиусом  $OM$ .

Далее, очевидно, что каждой точке пространства соответствует определенная тройка чисел  $u_1, u_2, u_3$ , где  $u_1 \geq 0$ ,

$0 \leq u_2 \leq \pi$ ,  $0 \leq u_3 < 2\pi$ , и обратно, каждой такой тройке чисел отвечает определенная точка пространства (эта однозначность нарушается, как и в случае цилиндрической системы координат, лишь для точек оси  $e_3$ , для которых координата  $u_3$  неопределенна).

Легко установить связь между сферическими и прямоугольными декартовыми координатами точки:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u_1 \sin u_2 \cos u_3, \\ x_2 &= u_1 \sin u_2 \sin u_3, \\ x_3 &= u_1 \cos u_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и, обратно,

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ u_2 &= \arccos \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ \operatorname{tg} u_3 &= \frac{x_2}{x_1}. \end{aligned} \right\}$$

Определитель  $\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right|$  в этом случае будет равен  $u_1^2 \sin u_2$ . Он обращается в нуль только на оси  $e_3$ , в точках которой нарушается взаимная однозначность соответствия между декартовыми и сферическими координатами.

Координатными поверхностями в сферической системе координат служат:  $u_1$ -поверхностями — сферы с центром в начале координат,  $u_2$ -поверхностями — полуплоскости, ограниченные осью  $e_3$ , и  $u_3$ -поверхностями — конические поверхности с образующими, составляющими постоянный угол с осью  $e_3$ . Название «сферическая система координат» опять-таки объясняется тем, что среди координатных поверхностей имеются сферы.

Координатными линиями в сферической системе координат служат: линиями  $u_1$  — лучи, выходящие из начала координат; линиями  $u_2$  — полуокружности с центром в начале координат, лежащие в полуплоскостях, ограниченных осью  $e_3$ , и, наконец, линиями  $u_3$  — окружности с центром на оси  $e_3$ , расположенные в плоскостях, перпендикулярных  $e_3$  (рис. 25).

Во всех рассмотренных примерах криволинейных систем координат координатные линии, проходящие через произволь-

ную точку пространства, ортогональны друг другу. Системы криволинейных координат, обладающие таким свойством, называются *ортогональными*. Векторы  $x_1, x_2, x_3$ , касательные

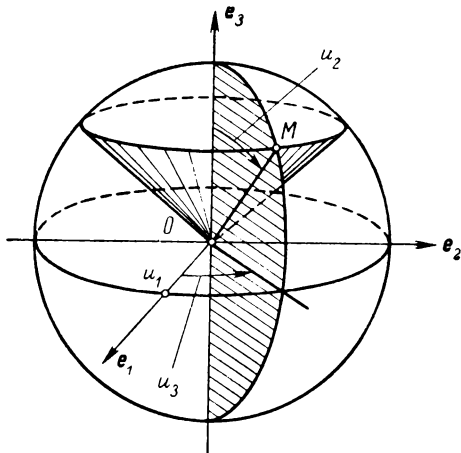


Рис. 25.

к координатным линиям такой системы координат, будут попарно ортогональны в каждой точке пространства. Неортогональные системы криволинейных координат мы рассматривать не будем.

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Ввести систему криволинейных координат на плоскости  $E_2$  аналогично тому, как это сделано в тексте для пространства  $E_3$ .

2. Установить формулы, выражающие криволинейные координаты точки плоскости  $E_2$  через прямоугольные декартовы и обратно, найти координатные линии, подсчитать определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

и выяснить, в каких точках плоскости  $E_2$  нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоуголь-

ными декартовыми координатами точки на плоскости для следующих криволинейных систем координат  $u_1, u_2$ :

а) для полярной системы координат, определяемой равенством \*,

$$x_1 + ix_2 = u_1 e^{iu_2} \quad (0 \leq u_1 < \infty, \quad -\pi < u_2 \leq \pi);$$

б) для обобщенной полярной системы координат, определяемой равенством

$$\frac{x_1}{a_1} + i \frac{x_2}{a_2} = u_1 e^{iu_2} \quad (0 \leq u_1 < \infty, \quad -\pi < u_2 \leq \pi, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0);$$

в) для эллиптической системы координат, определяемой равенством

$$x_1 + ix_2 = \operatorname{ch} (u_1 + iu_2) \quad (0 \leq u_1 < \infty, \quad -\pi < u_2 \leq \pi);$$

г) для параболической системы координат, определяемой равенством

$$x_1 + ix_2 = \frac{1}{2} (u_1 + iu_2)^2 \quad (-\infty < u_1 < \infty, \quad 0 \leq u_2 < \infty);$$

д) для биполярной системы координат, определяемой равенством

$$x_1 + ix_2 = \operatorname{th} \frac{u_1 + iu_2}{2} \quad (-\infty < u_1 < \infty, \quad -\pi < u_2 \leq \pi).$$

3. Найти координатные поверхности и координатные линии, подсчитать определитель  $\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right|$  и установить, в каких точках пространства  $E_3$  нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами для следующих криволинейных систем координат  $u_1, u_2, u_3$  пространства  $E_3$ :

а) для обобщенной цилиндрической системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = a_1 u_1 \cos u_2, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2, \quad x_3 = u_3 \\ (u_1 \geq 0, \quad 0 < u_2 \leq 2\pi, \quad -\infty < u_3 < \infty, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0);$$

б) для обобщенной сферической системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = a_1 u_1 \sin u_2 \cos u_3, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2 \sin u_3, \quad x_3 = a_3 u_1 \cos u_2 \\ (u_1 \geq 0, \quad 0 \leq u_2 \leq \pi, \quad 0 \leq u_3 < 2\pi, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0);$$

---

\*) Для краткости часто криволинейные координаты на плоскости задают в комплексной форме, из которой легко найти выражение декартовых координат  $x_1, x_2$  через криволинейные координаты  $u_1$  и  $u_2$ , если приравнять между собой соответственно действительные и мнимые части основного равенства.

в) для эллипсоидальной системы координат, определяемой равенствами

$$\begin{aligned}x_1^2 &= \frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\x_2^2 &= \frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)}, \\x_3^2 &= \frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)},\end{aligned}$$

где  $a_1 > a_2 > a_3 > 0$  и  $u_1 < a_3 < u_2 < a_2 < u_3 < a_1$ ;

г) для параболлической системы координат, определяемой равенствами

$$\begin{aligned}x_1 &= u_1 u_2 \cos u_3, & x_2 &= u_1 u_2 \sin u_3, & x_3 &= \frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) \\(0 &\leq u_1 < \infty, & 0 &\leq u_2 < \infty, & -\pi < u_3 \leq \pi);\end{aligned}$$

д) для системы вырожденных эллипсоидальных координат, определяемых равенствами

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{sh} u_1 \sin u_2 \cos u_3, & x_2 &= \operatorname{sh} u_1 \sin u_2 \sin u_3, & x_3 &= \operatorname{ch} u_1 \cos u_2 \\(0 &\leq u_1 < \infty, & 0 &\leq u_2 \leq \pi, & -\pi < u_3 \leq \pi)\end{aligned}$$

или равенствами

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{ch} u_1 \sin u_2 \cos u_3, & x_2 &= \operatorname{ch} u_1 \sin u_2 \sin u_3, & x_3 &= \operatorname{sh} u_1 \cos u_2 \\(0 &\leq u_1 < \infty, & 0 &\leq u_2 \leq \pi, & -\pi < u_3 \leq \pi)\end{aligned}$$

в зависимости от того, будет ли эллипсоид вращения вытянутым или сплюснутым;

е) для системы тороидальных координат, определяемой равенствами

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\operatorname{sh} u_1 \cos u_3}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, & x_2 &= \frac{\operatorname{sh} u_1 \sin u_3}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, & x_3 &= \frac{\sin u_2}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2} \\(0 &\leq u_1 < \infty, & -\pi &< u_2 \leq \pi, & -\pi < u_3 \leq \pi).\end{aligned}$$

4. Выяснить, какие из систем криволинейных координат, определенных в задачах 2 и 3, будут ортогональными.

## § 4. Подвижной репер ортогональной криволинейной системы координат и тензорные поля

1. Пусть дана некоторая область  $\mathcal{U}^0$  евклидова пространства  $E_3$ , отнесенная к какой-нибудь ортогональной криволинейной системе координат  $u_1, u_2, u_3$ . Тогда через каждую точку  $M \in \mathcal{U}^0$  проходят три попарно ортогональные координатные линии. Построим единичные векторы  $e_1, e_2, e_3$ , исходящие

из точки  $M$ , касающиеся в  $M$  соответствующих координатных линий и направленные в сторону возрастания соответствующей координаты. Поскольку такое построение мы осуществляем в каждой точке  $M \in \mathcal{U}^0$ , то в каждой точке области  $\mathcal{U}^0$  возникает своя тройка единичных попарно ортогональных векторов  $e_1, e_2, e_3$ , которая зависит только от точки  $M$ :

$$e_i = e_i(M) \quad (i = 1, 2, 3),$$

или

$$e_i = e_i(u_1, u_2, u_3).$$

Такую тройку единичных попарно ортогональных векторов назовем *подвижным репером*, а сами эти векторы — *ортами* подвижного репера.

Если векторы  $e_1, e_2, e_3$  образуют в каждой точке правую тройку, то говорят, что задана *правая криволинейная система координат*. Так, например, прямоугольная декартова система координат  $Ox_1x_2x_3$  (при обычном расположении осей, принятом в аналитической геометрии) будет правой. Правыми будут также цилиндрическая и сферическая системы координат (но именно при том порядке координат, в котором они введены в примерах б), в) § 3).

Заметим, что в прямоугольной декартовой системе координат направления векторов  $e_1, e_2, e_3$  не зависят от точки, в которой они построены; можно сказать, что все положения подвижного репера получаются из какого-то одного его положения с помощью параллельного переноса.

Что касается действительно криволинейных систем координат (например, цилиндрической и сферической), то там векторы  $e_1, e_2, e_3$ , построенные в различных точках, уже вовсе не обязательно параллельны друг другу; так, например, в цилиндрической системе координат векторы  $e_1$  и  $e_2$ , построенные в разных точках, имеют разные направления.

2. Рассмотрим теперь радиус-вектор точки  $M$ :

$$x = x(u_1, u_2, u_3).$$

Когда  $u_2$  и  $u_3$  постоянны, а изменяется лишь  $u_1$ , годографом этого радиуса-вектора служит координатная линия  $u_1$ , а потому вектор  $\frac{\partial x}{\partial u_1}$  направлен по касательной к координатной линии

$u_1$  и, следовательно,

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1,$$

где

$$h_1 = |\mathbf{x}_1|.$$

Аналогично

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} = h_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3} = h_3 \mathbf{e}_3,$$

где

$$h_2 = |\mathbf{x}_2|, \quad h_3 = |\mathbf{x}_3|.$$

Обозначим теперь через  $\mathbf{e}_i^0$  неподвижный базис евклидова пространства. Тогда

$$\mathbf{x} = x_k \mathbf{e}_k^0,$$

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \mathbf{e}_k^0.$$

Так как

$$h_i^2 = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \right)^2,$$

то

$$h_i^2 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_i} \right)^2.$$

Таким образом,

$$h_i = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right)^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Величины  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  называются *коэффициентами Ламе*. (Их не следует путать с коэффициентами Ламе, введенными в § 4 предыдущей главы (стр. 259).) Формулы (1) дают выражение этих коэффициентов через частные производные от прямоугольных декартовых координат по криволинейным.

Рассмотрим теперь дифференциал радиуса-вектора  $\mathbf{x} = \overline{OM}$  точки  $M$ :

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{M} = x_i du_i.$$

Если внести сюда выражения для векторов  $\mathbf{x}_i$  через базисные векторы  $\mathbf{e}_i$  подвижного репера, присоединенного к точке



$M$ , то получим

$$dM = \sum_{i=1}^3 h_i du_i e_i.$$

(В этой формуле мы поставили знак суммы, так как в ней индекс повторяется три, а не два раза, как обычно.) Положим в этом соотношении

$$\omega_1 = h_1 du_1, \quad \omega_2 = h_2 du_2, \quad \omega_3 = h_3 du_3. \quad (2)$$

Тогда

$$dM = \omega_i e_i. \quad (3)$$

Величины  $\omega_i$  линейно зависят от дифференциалов  $du_i$  криволинейных координат. Поэтому их называют *линейными дифференциальными формами*. Формы  $\omega_i$  являются коэффициентами разложения дифференциала  $dM$  по векторам  $e_i$  подвижного репера, присоединенного к точке  $M$ .

Дифференциальные формы  $\omega_i$  являются линейно независимыми формами, так как уравнения (2) могут быть однозначно разрешены относительно независимых дифференциалов  $du_i$  криволинейных координат.

Из соотношения (3) можно получить выражение для квадрата элемента длины в криволинейной ортогональной системе координат. В самом деле,

$$ds^2 = dM^2 = \omega_i \omega_j e_i e_j.$$

Но  $e_i e_j = \delta_{ij}$ . Поэтому предыдущее соотношение переписывается в виде

$$ds^2 = \omega_i \omega_i$$

или, подробнее,

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2. \quad (4)$$

Подставляя сюда выражения (2) для формы  $\omega_i$ , получим другое выражение для квадрата элемента длины:

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2. \quad (4')$$

Далее, поскольку каждый из дифференциалов  $de_i$  векторов подвижного репера ( $i = 1, 2, 3$ ) сам является вектором, его можно разложить по векторам  $e_j$ ; обозначая коэффициенты этого разложения через  $\omega_{ij}$ , будем иметь

$$de_i = \omega_{ij} e_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Найдем, как выразятся коэффициенты  $\omega_{ij}$  через дифференциалы криволинейных координат. Если обе части формулы (5) скалярно умножить на вектор  $e_k$ , то получим

$$e_k de_i = e_k \omega_{ij} e_j = \omega_{ij} \delta_{jk} = \omega_{ik},$$

или

$$\omega_{ij} = e_j de_i.$$

Но

$$de_i = \frac{\partial e_i}{\partial u_k} du_k.$$

Поэтому

$$\omega_{ij} = e_j \frac{\partial e_i}{\partial u_k} du_k.$$

Следовательно, коэффициенты  $\omega_{ij}$  являются линейными дифференциальными формами от дифференциалов  $du_k$  криволинейных координат. Если, пользуясь соотношениями (2), подставить в предыдущие формулы вместо дифференциалов  $du_k$  независимые формы  $\omega_k$ , то получим

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{h_k} e_j \frac{\partial e_i}{\partial u_k} \omega_k.$$

Последние формулы можно переписать в виде

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ijk} \omega_k, \quad (6)$$

где через  $\Gamma_{ijk}$  обозначены коэффициенты

$$\Gamma_{ija} = \frac{1}{h_a} e_j \frac{\partial e_i}{\partial u_a}. \quad (7)$$

Здесь в правой части стоит выражение, в котором по повторяющемуся индексу  $a$  суммирование не производится. Поэтому его обозначили греческой буквой. И в дальнейшем по повторяющемуся греческому индексу суммирование производиться не будет. Для латинских же индексов остаются в силе все прежние правила о суммировании. Величины  $\Gamma_{ijk}$  будем называть *символами Кристоффеля* \*).

---

\*) Обычно символами Кристоффеля называют величины, похожие, но несколько отличающиеся от введенных нами величин (см. [12], стр. 357).

Уравнения (3) и (5) называют *уравнениями инфинитезимального перемещения подвижного репера*, связанного с ортогональной криволинейной системой координат. Дифференциальные формы  $\omega_k$  и  $\omega_{ij}$  называют *компонентами инфинитезимального перемещения* этого подвижного репера.

Как уже указывалось, дифференциальные формы  $\omega_k$  являются линейно независимыми. Что касается форм  $\omega_{ij}$ , то они удовлетворяют целому ряду соотношений. Эти соотношения мы получим, дифференцируя равенства

$$e_i e_j = \delta_{ij},$$

выполняющиеся для базисных векторов ортонормированного репера:

$$e_i de_j + e_j de_i = 0.$$

Подставляя сюда разложения векторов  $de_j$  и  $de_i$  из формулы (5), найдем искомые соотношения:

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \quad (8)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0.$$

Из (8) вытекает, что символы Кристоффеля  $\Gamma_{ijk}$  также удовлетворяют целому ряду соотношений. В самом деле, соотношения (8) могут быть переписаны в виде

$$\Gamma_{ijk}\omega_k + \Gamma_{jik}\omega_k = 0,$$

откуда, в силу линейной независимости форм  $\omega_k$ , следует, что

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = 0, \quad (9)$$

т. е. величины  $\Gamma_{ijk}$  кососимметричны по первым двум индексам. В частности,

$$\Gamma_{\alpha\alpha k} = 0.$$

Установим еще некоторые соотношения между символами Кристоффеля. Имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{h_\beta} e_j \frac{\partial e_\alpha}{\partial u_\beta} = \frac{1}{h_\beta} e_j \frac{\partial}{\partial u_\beta} \left( \frac{x_\alpha}{h_\alpha} \right) = \frac{1}{h_\beta} e_j \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_\beta} - \frac{x_\alpha}{h_\alpha^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u_\beta} \right) = \\ &= \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_j \frac{\partial^2 x}{\partial u_\beta \partial u_\alpha} - \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_j e_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial u_\beta}. \end{aligned}$$

В этом соотношении следует считать  $j \neq \alpha$ , так как  $\Gamma_{\alpha\alpha} = 0$ . Поэтому векторы  $e_j$  и  $e_\alpha$  ортогональны и второе слагаемое правой части этого соотношения обращается в нуль. Следовательно, при  $j \neq \alpha$

$$\Gamma_{\alpha j\beta} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_j \frac{\partial^2 x}{\partial u_\beta \partial u_\alpha}.$$

Так как  $\frac{\partial^2 x}{\partial u_\beta \partial u_\alpha} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}$ , то при  $j \neq \beta$  эти выражения будут симметричными относительно индексов  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\Gamma_{\alpha j\beta} = \Gamma_{\beta j\alpha} \quad \text{при } j \neq \beta, \quad j \neq \alpha. \quad (10)$$

Пусть теперь  $j = \beta$ . Тогда

$$\Gamma_{\alpha\beta\beta} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_\beta \frac{\partial}{\partial u_\alpha} (h_\beta e_\beta) = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_\beta \left( e_\beta \frac{\partial h_\beta}{\partial u_\alpha} + h_\beta \frac{\partial e_\beta}{\partial u_\alpha} \right).$$

Но  $e_\beta^2 = 1$ , а  $e_\beta \frac{\partial e_\beta}{\partial u_\alpha} = 0$ . Поэтому

$$\Gamma_{\alpha\beta\beta} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \ln h_\beta}{\partial u_\alpha}.$$

Соотношения (10) означают, что *символы Кристоффеля  $\Gamma_{ijk}$  при  $j \neq i$ ,  $j \neq k$  симметричны по крайним индексам*. Это свойство вместе со свойством (9) кососимметричности по первым двум индексам дает для величин  $\Gamma_{ijk}$  с разными индексами  $i, j, k$  соотношение

$$\Gamma_{ijk} = -\Gamma_{jik} = -\Gamma_{kij} = \Gamma_{ikj} = \Gamma_{jki} = -\Gamma_{kji} = -\Gamma_{ijk},$$

которое означает, что величины  $\Gamma_{ijk}$  с разными индексами равны 0:

$$\Gamma_{ijk} = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k.$$

Таким образом, в ортогональной криволинейной системе координат из 27 величин  $\Gamma_{ijk}$  ненулевыми могут быть не более 12:

$$\Gamma_{\beta\alpha\alpha} = -\Gamma_{\alpha\beta\alpha} = \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \ln h_\alpha}{\partial u_\beta}. \quad (11)$$

3. Найдем для рассмотренных в § 3 декартовых, цилиндрических и сферических координат коэффициенты Ламе  $h_i$ , величины  $\omega_i$ ,  $\omega_{ij}$ ,  $\Gamma_{ijk}$  и  $ds^2$  — квадрат длины вектора  $dM$ .

а) В случае прямоугольных декартовых координат векторы  $e_i = \text{const}$ , поэтому  $\frac{\partial e_i}{\partial u_j} = 0$ , и, следовательно, в силу формул (7) все величины  $\Gamma_{ijk} = 0$ .

Обратно, если в какой-нибудь системе координат все  $\Gamma_{ijk} = 0$ , то  $\omega_{ij} = 0$ ,  $de_i = 0$ ,  $e_i = \text{const}$  и рассматриваемая система координат будет прямоугольной декартовой.

Что касается коэффициентов Ламе, то формулы (1) показывают, что все они равны 1:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1,$$

так как  $u_i = x_i$ , и поэтому по формулам (4')

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2.$$

Наконец, формулы (2) показывают, что  $\omega_i = du_i$ .

б) В случае цилиндрической системы координат в силу формул (3) § 3 и формул (1) этого параграфа получаем следующие выражения для коэффициентов Ламе:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 = 1, \\ h_2^2 &= u_1^2 \sin^2 u_2 + u_1^2 \cos^2 u_2 = u_1^2, \\ h_3^2 &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$h_1 = 1, \quad h_2 = u_1, \quad h_3 = 1,$$

и по формулам (4')

$$ds^2 = du_1^2 + u_1^2 du_2^2 + du_3^2.$$

Что касается величин  $\Gamma_{ijk}$ , то те из них, которые могут быть отличными от нуля, в силу формул (11) в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{122} &= -\Gamma_{212} = \frac{1}{u_1}, \quad \Gamma_{133} = \Gamma_{313} = 0, \quad \Gamma_{211} = \Gamma_{121} = 0, \\ \Gamma_{233} &= \Gamma_{323} = 0, \quad \Gamma_{311} = \Gamma_{131} = 0, \quad \Gamma_{322} = \Gamma_{232} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу формул (2) и (6)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= du_1, \quad \omega_2 = u_1 du_2, \quad \omega_3 = du_3, \\ \omega_{12} &= -\omega_{21} = \Gamma_{122} du_2 = \frac{du_2}{u_1}, \quad \omega_{13} = 0, \\ \omega_{23} &= 0, \quad \omega_{31} = 0, \quad \omega_{32} = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} de_3 &= 0, \\ de_1 &= \frac{du_2}{u_1} e_2, \\ de_2 &= -\frac{du_2}{u_1} e_1, \end{aligned}$$

т. е. что при перемещении репера вектор  $e_3$  не меняется, а векторы  $e_1$  и  $e_2$  меняются (это, конечно, вытекает также из геометрического смысла цилиндрических координат).

в) Для сферической системы координат в силу формул (4) § 3 и формул (1) этого параграфа получаем следующие выражения для коэффициентов Ламе:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \sin^2 u_2 \cos^2 u_3 + \sin^2 u_2 \sin^2 u_3 + \cos^2 u_2 = 1, \\ h_2^2 &= u_1^2 \cos^2 u_2 \cos^2 u_3 + u_1^2 \cos^2 u_2 \sin^2 u_3 + u_1^2 \sin^2 u_2 = u_1^2, \\ h_3^2 &= u_1^2 \sin^2 u_2 \sin^2 u_3 + u_1^2 \sin^2 u_2 \cos^2 u_3 = u_1^2 \sin^2 u_2, \end{aligned}$$

откуда

$$h_1 = 1, \quad h_2 = u_1, \quad h_3 = u_1 \sin u_2,$$

и по формулам (4')

$$ds^2 = du_1^2 + u_1^2 du_2^2 + u_1^2 \sin^2 u_2 du_3^2.$$

Те из величин  $\Gamma_{ijk}$ , которые в ортогональных криволинейных координатах могут быть отличными от нуля, в сферической системе координат в силу (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{122} &= -\Gamma_{212} = \frac{1}{u_1}, & \Gamma_{133} &= -\Gamma_{313} = \frac{1}{u_1}, & \Gamma_{211} &= \Gamma_{121} = 0, \\ \Gamma_{233} &= -\Gamma_{323} = \operatorname{ctg} u_2, & \Gamma_{311} &= \Gamma_{131} = 0, & \Gamma_{322} &= \Gamma_{232} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу формул (2) и (6) имеем следующие выражения для форм  $\omega_i$  и  $\omega_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= du_1, & \omega_2 &= u_1 du_2, & \omega_3 &= u_1 \sin u_2 du_3, \\ \omega_{12} &= -\omega_{21} = \frac{1}{u_1} du_2, & \omega_{13} &= -\omega_{31} = \frac{1}{u_1} du_3, \\ \omega_{23} &= -\omega_{32} = \operatorname{ctg} u_2 du_3. \end{aligned}$$

Теперь все  $de_i \neq 0$ , т. е. при переходе из точки  $M$  в бесконечно близкую точку все векторы подвижного репера поворачиваются

(этот факт также легко усматривается из геометрического смысла сферических координат).

4. Чтобы рассмотреть тензоры в ортогональных криволинейных координатах, выясним, что происходит с подвижным репером, когда ортогональные криволинейные координаты подвергаются преобразованию

$$u_{i'} = u_i(u_1, u_2, u_3) \quad (i' = 1, 2, 3), \quad (12)$$

где  $u_1, u_2, u_3$  — новые ортогональные криволинейные координаты. Формулы (12) предполагаются обратимыми, а функции  $u_{i'}(u_1, u_2, u_3)$  — дважды непрерывно дифференцируемыми.

Для новых ортогональных криволинейных координат  $u_{i'}$  в каждой точке  $M$  возникает свой подвижной репер  $\{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}\}$ , векторы которого можно выразить через векторы  $e_1, e_2, e_3$  подвижного репера, соответствующего старой ортогональной криволинейной системе координат, по формулам

$$e_{i'}(M) = \gamma_{i'i}(M) e_i(M). \quad (13)$$

Коэффициенты  $\gamma_{i'i}(M)$  образуют ортогональную матрицу, элементы которой зависят от точки  $M$ . (Можно сказать, что в каждой точке закон преобразования подвижного репера задается своей ортогональной матрицей.) Коэффициенты  $\gamma_{i'i}(M)$  могут быть выражены через частные производные  $\frac{\partial u_{i'}}{\partial u_i}$  и коэффициенты Ламе  $h_i$  и  $h_{i'}$  старой и новой систем криволинейных координат (см. упр. 3 к этому параграфу).

Пусть теперь в некоторой ортогональной криволинейной системе координат дано тензорное поле, например поле тензора третьей валентности

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M).$$

Координаты этого тензора будем вычислять в каждой точке относительно того локального подвижного репера, который присоединен к этой точке.

Если ортогональные криволинейные координаты переходят в другие такие же координаты по формулам (12), то векторы подвижного репера в точке  $M$  преобразуются по формулам (13), а тензор  $a_{ijk}$  подвергается преобразованию по обычному тензорному закону:<sup>1</sup>

$$a_{i'j'k'}(M) = \gamma_{i'i}(M) \gamma_{j'j}(M) \gamma_{k'k}(M) a_{ijk}(M),$$

где все компоненты тензора и все элементы матрицы преобразования берутся в одной и той же точке.

Поскольку, как было отмечено в § 1, в случае тензорного поля все алгебраические операции над тензором поля производятся по отдельности в каждой точке, то все такие операции автоматически переносятся и на случай тензорного поля в ортогональных криволинейных координатах: их следует производить в каждой точке  $M$  относительно локального репера, который в данной системе координат присоединен к этой точке.

5. Выясним теперь, как при переходе от одной ортогональной криволинейной системы координат к другой преобразуются величины  $\omega_i$ ,  $\omega_{ij}$ ,  $\Gamma_{ijk}$ .

Поскольку из формулы (2) следует, что  $\omega_i$  — координаты вектора  $dM$  относительно базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , то совокупность величин  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  образует тензорное поле первой валентности и потому при переходе от одной ортогональной криволинейной системы координат к другой преобразуется по формулам

$$\omega_{i'} = \gamma_{i'i} \omega_i. \quad (14)$$

Далее, дифференцируя равенства (13) и пользуясь при этом соотношениями (5) и аналогичными соотношениями для  $e_{i'}$

$$de_{i'} = \omega_{i'j} e_j,$$

получим

$$\omega_{i'j} e_j = d\gamma_{i'i} e_i + \gamma_{i'i} \omega_i e_j$$

или, используя (13) и изменяя индекс суммирования  $i$  на  $j$  в первом слагаемом правой части, будем иметь

$$\omega_{i'j} \gamma_{j'j} e_j = (d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'j} \omega_{ij}) e_j,$$

откуда в силу линейной независимости векторов  $e_j$

$$\omega_{i'j} \gamma_{j'j} = d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'j} \omega_{ij}.$$

Умножим обе части этого равенства на  $\gamma_{k'j}$  и просуммируем по  $j$ . Тогда

$$\omega_{i'j} \gamma_{j'j} \gamma_{k'j} = \gamma_{k'j} d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'j} \gamma_{k'j} \omega_{ij},$$

или, используя, что  $\gamma_{j'j} \gamma_{k'j} = \delta_{j'k'}$ , окончательно получим

$$\omega_{i'k'} = \gamma_{k'j} d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'j} \gamma_{k'j} \omega_{ij}. \quad (15)$$



Отсюда видно, что величины  $\omega_{ik}$  преобразуются не по тензорному закону (имеются дополнительные члены  $\gamma_{k'j} d\gamma_{i'j}$ , которые, вообще говоря, не равны нулю, так как величины  $\gamma_{i'j}$  меняются от точки к точке).

Отметим, что если воспользоваться равенствами (2), то дифференциалы  $d\gamma_{i'j}$  можно представить в виде

$$d\gamma_{i'j} = \frac{\partial \gamma_{i'j}}{\partial u_k} du_k = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \gamma_{i'j}}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha$$

или, если принять обозначение

$$\frac{\partial \gamma_{i'j}}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} = \gamma_{i'j\alpha},$$

в виде

$$d\gamma_{i'j} = \gamma_{i'j\alpha} \omega_\alpha. \quad (16)$$

Из (15), используя равенства (6) и (16), будем иметь

$$\Gamma_{i'k'l'} \omega_{l'} = \gamma_{k'j} \gamma_{i'jl} \omega_l + \gamma_{i'i} \gamma_{k'k} \Gamma_{ikl} \omega_l.$$

Выражая формы  $\omega_l$  через  $\omega_{l'}$  по формулам

$$\omega_l = \gamma_{ll'} \omega_{l'},$$

обратным формулам (14), и учитывая, что  $\gamma_{ll'} = \gamma_{l'l}$  и что формы  $\omega_{l'}$  линейно независимы, окончательно получаем

$$\Gamma_{i'k'l'} = \gamma_{k'j} \gamma_{l'l} \gamma_{i'jl} + \gamma_{i'i} \gamma_{k'k} \gamma_{l'l} \Gamma_{ikl}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что величины  $\Gamma_{ikl}$  тоже не образуют тензора.

То, что величины  $\omega_{ij}$  и  $\Gamma_{ijk}$  не образуют тензоров, можно подтвердить еще и следующими геометрическими соображениями. Ранее было показано, что эти величины в прямоугольной декартовой системе координат тождественно равны нулю, а в цилиндрической и сферической системах координат среди них есть отличные от нуля. Но для тензоров такого положения быть не может: если все координаты тензора равны нулю в одной системе координат, то то же самое будет, в силу линейного однородного закона преобразования тензора, и в любой другой допустимой системе координат.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти величины  $h_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\omega_{ij}$ ,  $\Gamma_{ijk}$  в криволинейных ортогональных системах координат, указанных в задачах 2 а) — д) и 3 в) — е) предыдущего параграфа.

2. а) Доказать формулу (14) непосредственно, используя (13) и то, что  $\omega_{i'} = e_{i'} dM$ ,  $\omega_i = e_i dM$ .

б) Доказать формулы (15) и (17) непосредственно, используя (5), (7), (12) и то, что  $\omega_{i'j'} = e_{i'} de_{j'}$ ,  $\omega_{ij} = e_i de_j$ .

3. Найти выражение компонент  $\gamma'_{i'}(M)$  матрицы, определяющей переход от подвижного репера криволинейной системы координат  $(u_1, u_2, u_3)$  к подвижному реперу новой системы координат  $(u_1', u_2', u_3')$ , через частные производные  $\frac{\partial u_{i'}}{\partial u_i}$  и коэффициенты Ламе обеих систем.

4. Найти выражения величин  $\gamma'_{i'j}$ , входящих в формулы (16), через вторые производные от новых координат по старым и коэффициенты Ламе (см. предыдущую задачу).

### § 5. Дифференцирование тензорного поля в криволинейных координатах

1. Перейдем теперь к рассмотрению операции дифференцирования тензорного поля в криволинейных координатах.

Займемся сначала вопросом о дифференцировании скалярного поля. Пусть в некоторой ортогональной криволинейной системе координат  $(u_1, u_2, u_3)$ , определенной в некоторой области  $\mathcal{U}^0$  пространства  $E_3$ , задано скалярное поле  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3).$$

Дифференциал его определяется равенством

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} du_i = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha$$

(здесь мы воспользовались формулами (2) § 4). Далее, обозначая коэффициент при  $\omega_\alpha$  через  $\varphi_{,\alpha}$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} = \varphi_{,\alpha} \quad (1)$$

будем иметь

$$d\varphi = \varphi_{,i} \omega_i. \quad (2)$$

Совокупность величин  $\varphi_{,1}$ ,  $\varphi_{,2}$ ,  $\varphi_{,3}$  назовем *ковариантной (абсолютной) производной скалярного поля*.

Поскольку  $d\varphi$ , как и  $\varphi$ , образует некоторое скалярное поле, а  $\omega_i$  — тензорное поле первой валентности (стр. 307), то коэффициенты  $\varphi_{,i}$  в равенстве (2) также образуют тензорное поле первой валентности. Вектор с координатами  $\varphi_{,i}$  является инвариантным вектором, не зависящим от выбора системы координат в рассматриваемой области  $\mathcal{U}^\circ$  пространства  $E_3$ . Докажем, что этот вектор является градиентом скалярного поля  $\varphi$ , т. е.

$$\text{grad } \varphi = \varphi_{,i} e_i. \quad (3)$$

В самом деле, если мы перейдем к декартовой прямоугольной системе координат, то получим

$$h_i = 1, \quad \varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

и

$$\varphi_{,i} e_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i = \text{grad } \varphi$$

в соответствии с определением градиента скалярного поля, которое было дано в § 1 этой главы. Но последнее равенство не зависит от выбора системы координат в области  $\mathcal{U}^\circ$ . Поэтому оно остается верным для любой криволинейной системы координат.

Найдем еще выражение градиента скалярного поля в цилиндрической и сферической системах координат.

а) В цилиндрической системе координат мы имели (см. пример б) на стр. 304)

$$h_1 = 1, \quad h_2 = u_1, \quad h_3 = 1,$$

поэтому по формуле (1) получаем

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad \varphi_{,3} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_3},$$

откуда в силу формулы (3)

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} e_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{1}{u_1} e_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} e_3.$$

б) В сферической системе координат коэффициенты Ламе определялись формулами (см. пример в) на стр. 305)

$$h_1 = 1, \quad h_2 = u_1, \quad h_3 = u_1 \sin u_2;$$

отсюда в силу формулы (1)

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad \varphi_{,3} = \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}$$

и по формуле (3)

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3.$$

2. Перейдем теперь к дифференцированию векторного поля.

Пусть дано векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = a_i(M) \mathbf{e}_i(M).$$

Найдем его дифференциал. Пользуясь формулами (5) § 4, получим \*)

$$d\mathbf{a} = da_i \mathbf{e}_i + a_i d\mathbf{e}_i = da_i \mathbf{e}_i + a_i \omega_{ij} \mathbf{e}_j$$

или, меняя индекс суммирования  $i$  в первом слагаемом на  $j$  и пользуясь кососимметричностью форм  $\omega_{ij}$ , будем иметь

$$d\mathbf{a} = (da_j - a_i \omega_{ji}) \mathbf{e}_j.$$

Полагая

$$Da_j = da_j - a_i \omega_{ji}, \quad (4)$$

найдем

$$d\mathbf{a} = Da_j \mathbf{e}_j. \quad (5)$$

Так как  $d\mathbf{a}$  — вектор, то из равенства (5) следует, что  $Da_j$  — координаты тензора первой валентности. Этот тензор называется *абсолютным дифференциалом тензора*  $a_j$ .

Отметим, что обычные дифференциалы  $da_i$  координат векторного поля в криволинейной системе координат уже не образуют тензора первой валентности. Так как в прямоугольной декартовой системе координат (и только в такой системе координат)  $\omega_{ij} = 0$ , то в ней и только в ней абсолютные дифференциалы координат вектора совпадают с его обычными дифференциалами. Заметим еще, что для того, чтобы векторное поле  $\mathbf{a}(M)$ , заданное в криволинейной системе координат, было однородным полем (т. е. чтобы все векторы поля были

---

\*) Для простоты записи в дальнейшем будем вместо  $a_i(M)$ ,  $da_i(M)$  и т. д. писать просто  $a_i$ ,  $da_i$  и т. д., подразумевая, что все вычисления производятся в точке  $M$ .

равны между собой), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$Da_i = 0.$$

Далее, если воспользоваться тем, что

$$da_j = \frac{\partial a_j}{\partial u_k} du_k = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial a_j}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha$$

и

$$\omega_{ji} = \Gamma_{jik} \omega_k,$$

то формулу (4) можно записать в виде

$$Da_j = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial a_j}{\partial u_\alpha} - a_i \Gamma_{ji\alpha} \right) \omega_\alpha.$$

Обозначив выражение в скобках через  $a_{j,\alpha}$ :

$$a_{j,\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial a_j}{\partial u_\alpha} - a_i \Gamma_{ji\alpha}, \quad (6)$$

получим

$$Da_j = a_{j,k} \omega_k. \quad (7)$$

Поскольку  $Da_j$  — тензорное поле первой валентности и  $\omega_k$  — координаты произвольного вектора  $dM$  (стр. 307), то на основании обратного тензорного признака можно утверждать, что величины  $a_{j,k}$  образуют тензорное поле второй валентности. Это поле называется *абсолютной производной векторного поля*  $a_j$ . Легко видеть, что абсолютная производная тензорного поля совпадает с его обыкновенной производной тогда и только тогда, когда криволинейная система координат становится декартовой прямоугольной.

Таким образом, мы ввели понятия абсолютного дифференциала и абсолютной производной векторного поля. Они вычисляются по формулам (4) и (6) и представляют собой тензорные поля соответственно первой и второй валентности.

Если абсолютную производную  $a_{j,k}$  векторного поля  $a_j$  свернуть по индексам  $j$  и  $k$ , то получим инвариант, совпадающий с *дивергенцией векторного поля*  $a(M)$ :

$$\operatorname{div} a = a_{j,j} = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}. \quad (8)$$

В самом деле, инвариант  $a_{j,j}$  не зависит от выбора системы координат, но в прямоугольной декартовой системе координат

$$a_{j,j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_j} = \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Используя формулу (11) § 4, приведем выражение для дивергенции к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} + a_i \Gamma_{i11} + a_i \Gamma_{i22} + a_i \Gamma_{i33} = \\ &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} + \frac{a_2}{h_2 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} + \frac{a_3}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} + \\ &\quad + \frac{a_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} + \frac{a_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} + \frac{a_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} + \frac{a_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \end{aligned}$$

или, собирая члены с  $a_i$ , к виду

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(a_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(a_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(a_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right\}. \quad (8')$$

Если же абсолютную производную  $a_{j,k}$  свернуть с дискриминантным тензором  $-\varepsilon_{ijk}$ , то получим ротор векторного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = -\varepsilon_{ijk} a_{j,k} \mathbf{e}_i.$$

В самом деле, так как в прямоугольной декартовой системе координат  $a_{j,k} = \frac{\partial a_j}{\partial u_k}$ , то эта формула совпадает с формулой (9) § 1 (стр. 273) и в правой системе координат может быть записана в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = (a_{3,2} - a_{2,3}) \mathbf{e}_1 + (a_{1,3} - a_{3,1}) \mathbf{e}_2 + (a_{2,1} - a_{1,2}) \mathbf{e}_3. \quad (9)$$

С помощью соотношений (11) § 4 формула для проекции ротора на ось  $\mathbf{e}_1$  преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_1} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= a_{3,2} - a_{2,3} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial a_2}{\partial u_3} + a_i \Gamma_{i32} - a_i \Gamma_{i23} = \\ &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial a_2}{\partial u_3} - \frac{a_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} + \frac{a_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} = \\ &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(a_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(a_2 h_2)}{\partial u_3} \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично можно преобразовать формулы для проекций ротора на оси  $e_2$  и  $e_3$ . Окончательно формула для вычисления ротора в криволинейных ортогональных координатах принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} a = & \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (a_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (a_2 h_2)}{\partial u_3} \right\} e_1 + \\ & + \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial (a_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (a_3 h_3)}{\partial u_1} \right\} e_2 + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial (a_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial (a_1 h_1)}{\partial u_2} \right\} e_3. \quad (9) \end{aligned}$$

Найдем еще выражение оператора Лапласа в общей ортогональной криволинейной системе координат. Так как

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi,$$

то, пользуясь формулами (1), (3), (8'), получим

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \right\}. \quad (10)$$

Запишем теперь абсолютную производную, дивергенцию и ротор векторного поля, а также оператор Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат, которые при выбранном нами порядке координат все были правыми.

а) В цилиндрической системе координат, если использовать результаты примера б) § 4 (стр. 304), по формуле (3) получим

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{\partial a_1}{\partial u_1}, & a_{1,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_1}{\partial u_2} - \frac{a_2}{u_1}, & a_{1,3} &= \frac{\partial a_1}{\partial u_3}, \\ a_{2,1} &= \frac{\partial a_2}{\partial u_1}, & a_{2,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{a_1}{u_1}, & a_{2,3} &= \frac{\partial a_2}{\partial u_3}, \\ a_{3,1} &= \frac{\partial a_3}{\partial u_1}, & a_{3,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_3}{\partial u_2}, & a_{3,3} &= \frac{\partial a_3}{\partial u_3}. \end{aligned}$$

Поэтому из (8) имеем

$$\operatorname{div} a = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{\partial a_3}{\partial u_3} + \frac{a_1}{u_1}$$

или

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{u_1} \frac{\partial (u_1 a_1)}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{\partial a_3}{\partial u_3}$$

(последний результат можно получить также непосредственно из формулы (8')).

По формуле (9') получаем следующее выражение ротора в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left( \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{\partial a_2}{\partial u_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{\partial a_3}{\partial u_1} \right) \mathbf{e}_2 + \\ + \frac{1}{u_1} \left( \frac{\partial (u_1 a_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \right) \mathbf{e}_3,$$

и, наконец, пользуясь (10), найдем выражение для оператора Лапласа:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_3^2}.$$

б) В сферической системе координат, используя результаты примера в) § 4 (стр. 305), получим

$$a_{1,1} = \frac{\partial a_1}{\partial u_1}, \quad a_{1,2} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_1}{\partial u_2} - \frac{a_2}{u_1}, \quad a_{1,3} = \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{a_3}{u_1}, \\ a_{2,1} = \frac{\partial a_2}{\partial u_1}, \quad a_{2,2} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{a_1}{u_1}, \quad a_{2,3} = \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial a_2}{\partial u_3} - \\ - \operatorname{ctg} u_2 \cdot a_3, \\ a_{3,1} = \frac{\partial a_3}{\partial u_1}, \quad a_{3,2} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_3}{\partial u_2}, \quad a_{3,3} = \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} + \frac{a_1}{u_1}.$$

Далее по формулам (8') и (9') имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{u_1^2 \sin u_2} \left\{ \frac{\partial (a_1 u_1^2 \sin u_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial (a_2 u_1 \sin u_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (a_3 u_1)}{\partial u_3} \right\}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{u_1^2 \sin u_2} \left\{ \frac{\partial (a_3 u_1 \sin u_2)}{\partial u_2} - \frac{\partial (a_2 u_1)}{\partial u_3} \right\} \mathbf{e}_1 + \\ + \frac{1}{u_1 \sin u_2} \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{\partial (a_3 u_1 \sin u_2)}{\partial u_1} \right\} \mathbf{e}_2 + \\ + \frac{1}{u_1} \left\{ \frac{\partial (a_2 u_1)}{\partial u_1} - \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \right\} \mathbf{e}_3$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial (u_1^2 a_1)}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial (a_2 \sin u_2)}{\partial u_2} + \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial a_3}{\partial u_3}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{u_1 \sin u_2} \left\{ \frac{\partial (a_3 \sin u_2)}{\partial u_2} - \frac{\partial a_2}{\partial u_3} \right\} \mathbf{e}_1 + \\ + \frac{1}{u_1} \left\{ \frac{1}{\sin u_2} \frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{\partial (u_1 a_3)}{\partial u_1} \right\} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{u_1} \left\{ \frac{\partial (u_1 a_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \right\} \mathbf{e}_3.$$



Наконец, по формуле (10) найдем следующее выражение оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( u_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{1}{u_1^2 \sin u_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \sin u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{1}{u_1^2 \sin^2 u_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_3^2}.$$

3. Рассмотрим далее операцию абсолютного дифференцирования поля тензора второй валентности, которое задано в некоторой криволинейной ортогональной системе координат  $u_1, u_2, u_3$ :

$$a_{ij} = a_{ij}(u_1, u_2, u_3).$$

В каждой точке компоненты  $a_{ij}$  этого тензора можно рассматривать как коэффициент билинейной формы

$$\varphi = \varphi(x, y) = a_{ij} x_i y_j,$$

где  $x$  и  $y$  — произвольные векторные поля, имеющие относительно подвижного репера, присоединенного к криволинейной системе координат, соответственно координаты  $x_i$  и  $y_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Пользуясь формулами (4) для абсолютного дифференциала векторного поля, находим дифференциал формы  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} d\varphi &= da_{ij} x_i y_j + a_{ij} dx_i y_j + a_{ij} x_i dy_j = \\ &= da_{ij} x_i y_j + a_{ij} (Dx_i - x_k \omega_{ki}) y_j + a_{ij} x_i (Dy_j - y_k \omega_{kj}) = \\ &= (da_{ij} - a_{kj} \omega_{ik} - a_{ik} \omega_{jk}) x_i y_j + a_{ij} Dx_i y_j + a_{ij} x_i Dy_j \end{aligned}$$

(в последнем переходе мы дважды поменяли индексы суммирования: в одном слагаемом  $i$  на  $k$  и обратно, в другом —  $j$  на  $k$  и обратно).

Второе и третье слагаемые здесь показывают, как меняется билинейная форма  $\varphi$  в зависимости от изменения векторов полей  $x$  и  $y$  при переходе из точки  $M$  в бесконечно близкую точку. Первое из слагаемых отражает изменение этой формы за счет приращения коэффициентов  $a_{ij}$ . Поскольку  $d\varphi$  — инвариант,  $a_{ij} Dx_i y_j$  и  $a_{ij} x_i Dy_j$  — тоже инварианты, как результаты свертывания тензора  $a_{ij}$  соответственно с векторами  $Dx_i y_j$  и  $x_i Dy_j$ , то первое слагаемое также представляет собой инвариант — некоторую билинейную форму относительно векторов  $x$  и  $y$ . Коэффициенты этой последней билинейной формы образуют тензор второй валентности,

называемый *абсолютным дифференциалом тензора*  $a_{ij}$  и обозначаемый

$$Da_{ij} = da_{ij} - a_{kj} \omega_{ik} - a_{ik} \omega_{jk}. \quad (11)$$

Далее, если воспользоваться формулами

$$da_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_l} du_l = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{\alpha}} \frac{1}{h_{\alpha}} \omega_{\alpha},$$

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ijl} \omega_l,$$

то соотношение (11) можно записать в виде

$$Da_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{\alpha}} \frac{1}{h_{\alpha}} - a_{kj} \Gamma_{ik\alpha} - a_{ik} \Gamma_{jk\alpha} \right) \omega_{\alpha}.$$

Обозначив выражение, стоящее в скобках, через  $a_{ij, \alpha}$ :

$$a_{ij, \alpha} = \frac{1}{h_{\alpha}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{\alpha}} - a_{kj} \Gamma_{ik\alpha} - a_{ik} \Gamma_{jk\alpha}, \quad (12)$$

получим

$$Da_{ij} = a_{ij, l} \omega_l. \quad (13)$$

Отсюда ясно, что величины  $a_{ij, l}$  образуют тензорное поле валентности три, называемое *абсолютной производной тензорного поля*  $a_{ij}$ .

Таким образом, абсолютный дифференциал и абсолютная производная тензорного поля второй валентности образуют тензорные поля соответственно второй и третьей валентности и вычисляются по формулам (11) и (13).

Совершенно аналогично тому, как введены абсолютный дифференциал и абсолютная производная тензорного поля второй валентности, можно ввести абсолютный дифференциал и абсолютную производную тензорного поля валентности  $p$  ( $p > 2$ ) (для этого придется использовать уже не билинейные, а полилинейные формы). Аналогично окажется, что абсолютный дифференциал такого поля образует тензор той же валентности, а абсолютная производная — тензор на единицу большей валентности.

Формулы для их вычисления будут иметь вид, аналогичный формулам (4), (11) и (6), (12). Например, для тензора четвертой валентности  $a_{ijkl}$  абсолютный дифференциал и абсолютная

производная находятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} Da_{ijkl} &= da_{ijkl} - a_{mjkl} \omega_{im} - a_{imkl} \omega_{jm} - \\ &\quad - a_{ijml} \omega_{km} - a_{ijkml} \omega_{lm}, \\ a_{ijk, \alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial u_\alpha} - a_{mjkl} \Gamma_{im\alpha} - a_{imkl} \Gamma_{jm\alpha} - \\ &\quad - a_{ijml} \Gamma_{km\alpha} - a_{ijkml} \Gamma_{lm\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

4. Установим теперь правила абсолютного дифференцирования, т. е. определим, как находятся абсолютные дифференциалы и абсолютные производные от суммы тензоров, от произведения тензоров, от свернутого тензора и от свернутого произведения тензоров. Для простоты мы выведем эти правила на примерах тензоров небольших валентностей — вывод в общем случае будет точно таким же.

а) Абсолютное дифференцирование суммы. Пусть дано тензорное поле второй валентности  $c_{ij}$ , которое является суммой двух тензорных полей  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  той же валентности:

$$c_{ij}(M) = a_{ij}(M) + b_{ij}(M).$$

Продифференцируем это равенство обычным способом:

$$dc_{ij} = da_{ij} + db_{ij}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (11), получим

$$\begin{aligned} Dc_{ij} + c_{kj} \omega_{ik} + c_{ik} \omega_{jk} &= \\ &= Da_{ij} + a_{kj} \omega_{ik} + a_{ik} \omega_{jk} + Db_{ij} + b_{kj} \omega_{ik} + b_{ik} \omega_{kj} \end{aligned}$$

или, используя, что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , найдем

$$D(a_{ij} + b_{ij}) = Da_{ij} + Db_{ij}.$$

Таким образом, абсолютный дифференциал суммы тензоров равен сумме абсолютных дифференциалов слагаемых.

б) Абсолютное дифференцирование произведения тензоров. Пусть теперь

$$c_{ijk}(M) = a_{ij}(M) b_k(M).$$

Дифференцируем это равенство:

$$dc_{ijk} = b_k da_{ij} + a_{ij} db_k;$$

отсюда, пользуясь формулами для абсолютных дифференциалов  $Dc_{ijk}$ ,  $Da_{ij}$ ,  $Db_k$ , будем иметь

$$Dc_{ijk} + c_{ljk}\omega_{il} + c_{ilk}\omega_{jl} + c_{ijl}\omega_{kl} = \\ = b_k(Da_{ij} + a_{lj}\omega_{il} + a_{il}\omega_{jl}) + a_{ij}(Db_k + b_l\omega_{kl}),$$

откуда, используя равенство  $c_{ijk} = a_{ij}b_k$ , получаем

$$D(a_{ij}b_k) = b_k Da_{ij} + a_{ij} Db_k.$$

Таким образом, абсолютный дифференциал произведения тензоров равен абсолютному дифференциалу первого множителя, умноженному на второй множитель, плюс произведение первого множителя на абсолютный дифференциал второго.

в) Абсолютное дифференцирование свернутого тензора. Пусть тензор  $a_{ijk}$  свернут по первым двум индексам:

$$c_k(M) = a_{iik}(M).$$

Продифференцируем это равенство:

$$dc_k = da_{iik};$$

отсюда, пользуясь выражениями для  $Dc_k$  и  $Da_{iik}$ , найдем

$$Dc_k + c_l\omega_{kl} = Da_{iik} + a_{lik}\omega_{il} + a_{ilk}\omega_{il} + a_{iil}\omega_{kl}.$$

Последние слагаемые в левой и правой частях этого соотношения равны, так как  $c_l = a_{iil}$ . Кроме того,

$$a_{lik}\omega_{il} + a_{ilk}\omega_{il} = a_{lik}\omega_{il} + a_{lik}\omega_{li} = a_{lik}(\omega_{il} + \omega_{li}) \equiv 0.$$

Поэтому

$$Dc_k = Da_{iik}.$$

Это равенство можно записать еще таким образом:

$$D \sum_{i=1}^3 a_{iik} = \sum_{i=1}^3 Da_{iik},$$

т. е. операции абсолютного дифференцирования и свертывания тензоров перестановочны.

з) Абсолютное дифференцирование свернутого произведения тензоров. Пусть, наконец,

$$c_i = a_{ij}b_j.$$

Тогда, пользуясь правилом абсолютного дифференцирования свернутого тензора и произведения тензоров, найдем

$$Dc_i = D \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_j = \sum_{j=1}^3 D(a_{ij}b_j) = \sum_{j=1}^3 (b_j Da_{ij} + a_{ij}Db_j),$$

т. е. *правило дифференцирования произведения тензоров сохраняется и при наличии свертывания перемножаемых тензоров.*

Полученные здесь правила абсолютного дифференцирования автоматически переносятся и на абсолютные производные:

$$\begin{aligned}(a_{ij} + b_{ij})_{,l} &= a_{ij,l} + b_{ij,l}, \\ (a_{ij}b_k)_{,l} &= a_{ij,l}b_k + a_{ij}b_{k,l}, \\ \left( \sum_{i=1}^3 a_{ii} \right)_{,l} &= \sum_{i=1}^3 a_{ii,l}, \\ \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_j \right)_{,l} &= \sum_{j=1}^3 (a_{ij,l}b_j + a_{ij}b_{j,l}).\end{aligned}$$

Доказательство всех этих формул протекает аналогично. Докажем какую-нибудь одну из них, например вторую. В формуле

$$D(a_{ij}b_k) = b_k Da_{ij} + a_{ij}Db_k$$

заменяем абсолютные дифференциалы  $Da_{ij}$ ,  $Db_k$  и  $D(a_{ij}b_k)$  по формулам (13), (7) и аналогичной формуле для абсолютного дифференциала трехвалентного тензора  $a_{ij}b_k$ , тогда получим

$$(a_{ij}b_k)_{,l}\omega_l = b_k a_{ij,l}\omega_l + a_{ij}b_{k,l}\omega_l.$$

Так как формы  $\omega_l$  линейно независимы, то коэффициенты при  $\omega_l$  в правой и левой частях последнего соотношения будут равны, что приведет нас к доказываемой формуле:

$$(a_{ij}b_k)_{,l} = a_{ij,l}b_k + a_{ij}b_{k,l}.$$

Таким образом, мы видим, что операция абсолютного дифференцирования тензоров обладает всеми свойствами обычного дифференцирования. Этого, конечно, и следовало ожидать, так как абсолютное дифференцирование — инвариантная операция, не зависящая от выбора криволинейной ортогональной системы координат. А в прямоугольных декартовых координатах абсолютное дифференцирование совпадает с обычным дифференцированием тензоров.

5. Как уже отмечалось выше, абсолютные производные скалярного и векторного полей при переходе к прямоугольной декартовой системе координат совпадают с обычными производными этих полей. Это утверждение остается верным и для абсолютных производных тензорного поля любой валентности, что сразу следует из формул типа (14), если учесть, что в прямоугольных координатах  $h_i = 1$ ,  $\Gamma_{ijk} = 0$ . Именно поэтому для обыкновенных производных тензорного поля, заданного в прямоугольной декартовой системе координат, в § 1 использовались те же самые обозначения, что и в этом параграфе для абсолютных производных тензорного поля, заданного в произвольной криволинейной ортогональной системе координат.

Теперь ясно, что все тензорные уравнения, записанные в прямоугольной декартовой системе координат и содержащие обычные производные тензорного поля, при переходе к ортогональным криволинейным координатам перейдут в точно такие же уравнения, в которых вместо обычных производных будут стоять абсолютные производные.

В частности, полученные в § 2 уравнения механики сплошных сред будут справедливыми не только в прямоугольной системе координат, в которой они были выведены, но также и в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. При этом входящие в них обыкновенные производные надо заменить абсолютными производными.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя результаты задачи 1 к § 4, найти выражения для градиента скалярного поля, дивергенции и ротора векторного поля, а также оператора Лапласа в ортогональных криволинейных системах координат, рассмотренных в задачах 2 а) — д) и 3 а) — е) к § 3.

## 2. Используя равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u_i = 0$$

(почему оно верно?), вывести формулу

$$\operatorname{rot} e_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \operatorname{grad} h_\alpha \times e_\alpha,$$

а из нее получить формулу (9').

## 3. Используя равенство

$$\operatorname{div} e_i = \operatorname{div} (e_j \times e_k) = e_k \operatorname{rot} e_j - e_j \operatorname{rot} e_k$$

(см. задачу 2 г) на стр. 277), где индексы  $i, j, k$  различны и  $e_i, e_j, e_k$  образуют правую тройку, вывести формулу

$$\operatorname{div} e_i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_j h_k)}{\partial u_i} \quad (i \neq j, j \neq k, k \neq i),$$

а из нее получить формулу (8').

## 4. Доказать равенства

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial u_j} = \frac{e_j}{h_\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u_j} \quad (\alpha \neq j, j \neq k, k \neq \alpha),$$

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial u_\alpha} = - \sum_{i \neq \alpha} \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u_i} e_i.$$

5. Векторное поле  $a$  в сферических координатах имеет компоненты

$$a_1 = \frac{2k \cos u_2}{u_1^3}, \quad a_2 = \frac{k \sin u_2}{u_1^3}, \quad a_3 = 0.$$

Доказать, что это поле потенциально и соленоидально, и найти его потенциал.

## 6. Найти решения уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0,$$

записанного в сферических координатах, если функция  $\varphi$  зависит от одной сферической координаты  $u_1, u_2$  или  $u_3$ . Рассмотреть все три случая.

7. а) Найти  $a_{ij, k}, a_{ij, j}, a_{ji, j}$ .

б) Найти  $\delta_{ij, k}$  и  $(x_i y_i)_{, k}$ , где  $x_i, y_i$  — координаты векторов  $x$  и  $y$  в некоторой криволинейной системе координат.

## в) Доказать формулу

$$x_{, i} = \frac{x_{j, i} x_j}{x},$$

где  $x = |x|$  и  $x_i$  — координаты вектора  $x$  в некоторой криволинейной системе координат.

8. Записать уравнение неразрывности (стр. 284) и уравнения движения деформируемой среды (стр. 286) в цилиндрических и сферических координатах.

## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

### Глава I

**§ 1.** 1. а), в) Не образует. б) Образует, если прямая проходит через начало координат. 2. а), в), г), д) Образует. б), е) Не образует. 3. Не образует. 4. Образует, «нулем» пространства  $R^+$  служит число  $1 \in R^+$ , противоположным для элемента  $p \in R^+$  будет элемент  $\frac{1}{p} \in R^+$ . 7. Совокупность векторов  $L_3$ , лежащих в какой-нибудь плоскости или на какой-нибудь прямой, которые проходят через начало координат, само пространство  $L_3$  и подпространство, состоящее из одного нулевого вектора. 8. Совокупности а), в), г), д).

**§ 2.** 1. 1) а)  $\alpha = -2$ ; б)  $\alpha = -1$ ; в)  $\alpha = \pm 1$ ; 2) а)  $\alpha = 3, \beta = 2$ ; б)  $\alpha = -\frac{9}{5}, \beta = -\frac{23}{5}$ . 2. а)  $\alpha = -2$ ; б)  $\alpha = \frac{7}{4}$ . 4. Соотношение

$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0$  рассмотреть при  $t = \frac{1}{2}$  и  $t = \frac{3}{2}$ . 5. Воспользоваться тем, что уравнение степени  $n$  не может иметь более  $n$  корней. 6. Функции  $1, t, t^2, \dots, t^n \in C[a, b]$  линейно независимы при любом  $n$  (см. задачу 5). 7. Равенство  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$  записать в координатной форме и показать, что полученная система однородных уравнений имеет ненулевое решение. 9. Из  $\alpha(a_1 + a_2) + \beta(a_2 + a_3) + \gamma(a_3 + a_1) = 0$  в силу линейной независимости  $a_1, a_2, a_3$  следует  $\alpha + \gamma = \alpha + \beta = \beta + \gamma = 0$ , откуда  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

**§ 3.** 1.  $x = a_1 + 2a_2 + 3a_3$ . У к а з а н и е. Установив линейную независимость векторов  $a_1, a_2, a_3$  (см. задачу 7 к § 2), записать вектор  $x$  в виде  $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$  и, расписав это равенство в координатной форме, решить полученную систему относительно  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . 2. Размерность равна  $n + 1$ , простейший базис образуют многочлены  $1, t, t^2, \dots, t^n$ . Координатами многочлена  $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$  в этом базисе служат коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . 3. Это пространство в силу результата задачи 6 к § 2 бесконечномерно. 4. Размерность равна 1, базис образует любой элемент  $x \neq 1$ . 5. Результат вытекает из того, что базис  $L'_n$  будет базисом и  $L_n$ . 6. Взяв базис  $L' \cap L''$ , дополнить его как до базиса  $L'$ , так и до базиса  $L''$  и доказать, что векторы базиса  $L' \cap L''$  вместе



с обеими совокупностями дополняющих векторов образуют базис пространства  $L' + L''$ . 7. Воспользоваться результатами задач 6 и 5. 8. Воспользоваться результатом задачи 6. 9. Пересечение одномерно, сумма — все пространство  $L_3$ . 10.  $s=3$ ,  $d=2$ . 11. Базис суммы образуют, например, векторы  $a_1, a_2, a_3, b_2$ , а пересечения — векторы  $b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3, b_3 = 5a_1 - a_2 - 2a_3$ . 12. а) Базис образуют, например, векторы  $(1, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$ . Размерность равна  $n-1$ . б) Базис образуют, например, векторы  $(1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots$  и вектор  $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ . Размерность равна  $1 + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ , где  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $\frac{n+1}{2}$ . в) Базис образуют, например, векторы  $(1, 0, 1, 0, \dots)$  и  $(0, 1, 0, 1, \dots)$ . Размерность равна 2. г) Базис образуют, например, векторы  $(1, 0, 0, \dots, -1), (0, 1, 0, \dots, -1), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1, -1)$ . Размерность равна  $n-1$ . 13. Базис образуют любые  $n$  линейно независимых решений этого уравнения, размерность равна  $n$ . Координатами произвольного решения в каком-нибудь базисе служат коэффициенты его разложения по элементам этого базиса.

§ 4. 1. а) Представив  $\overline{BC}$  в виде  $\overline{AC} - \overline{AB}$ , найти  $\overline{BC}^2$ . б) В параллелограмме  $ABCD$  имеем  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ ,  $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{AB}$ . Найти далее  $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ . в) В ромбе  $ABCD$  имеем  $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2$ ,  $(\overline{AB} - \overline{AD})(\overline{AB} + \overline{AD}) = 0$ , или  $\overline{AC} \cdot \overline{DB} = 0$ . г) Для прямоугольника  $ABCD$   $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$ , поэтому  $(\overline{AB} + \overline{BC})^2 = (\overline{AB} - \overline{BC})^2$ , т. е.  $\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2$  или  $AC = BD$ . д) Аналогично а). е) Медиана  $AD$  треугольника  $ABC$  равна  $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{AB})$ . Найти далее  $\overline{AD}^2$  и воспользоваться результатом задачи 1а). ж) Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — равные медианы треугольника  $ABC$ , тогда  $\overline{AA_1}^2 = \overline{BB_1}^2$ , откуда  $(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = (\overline{BA} + \overline{BC})^2$ , или  $(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BA} + \overline{BC})(\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BA} - \overline{BC}) = 0$ , или  $\overline{CC_1} \cdot \overline{AB} = 0$ . з) Выразить векторы диагоналей через векторы оснований и боковых сторон; воспользоваться тем, что разность векторов боковых сторон равна разности векторов диагоналей. и) Для правильного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  имеем  $\overline{A_3A_4} = \overline{A_1A_4} - \overline{A_1A_3}$ ,  $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} = \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4} - \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3}$  или, обозначая ребро тетраэдра через  $l$ , получим  $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} = l^2 \cos 60^\circ - l^2 \cos 60^\circ = 0$ , т. е.  $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} = 0$ . 2.  $(x_i y_i)^2 \leq (x_j x_j)(y_k y_k)$ . 4. а),

б) Нельзя. в) Можно. 6.  $|f(t)| = \sqrt{f(t) \cdot f(t)} = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$ .

8. Вывести из  $(\lambda x - y) \cdot (\lambda x - y) \geq 0$ . 9. В  $E_n$   $|x_i y_i| \leq \sqrt{x_j x_j} \times \sqrt{y_k y_k}$  ( $i, j, k = 1, \dots, n$ ); в  $C[a, b]$   $\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq$

$\leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$ . 10.  $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ . 14. Рассмотреть скалярный квадрат вектора  $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ . 15.  $|x + y|^2 = xx + 2xy + yy \begin{cases} \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2, \\ \geq |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2. \end{cases}$

16.  $\left| \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} - \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \right| \leq \sqrt{\int_a^b [f(t) + g(t)]^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$ . 17. Найти  $\left( x - \sum_{i=1}^k (xe_i) e_i \right)^2$  и

воспользоваться тем, что  $\text{Pr } e_i x = xe_i$  и  $x = \sum_{i=1}^n (xe_i) e_i$ . 18. а) Для функции  $u_k(t) = (t^2 - 1)^k$  показать, что  $u_k^{(j)}(\pm 1) = 0$  при  $j < k$ ;

интеграл  $\int_{-1}^1 u_k^{(k)}(t) t^j dt$  интегрировать по частям до тех пор, пока множитель  $t^s$  не исчезнет под знаком интеграла; показать, что при  $j = 0, \dots, k-1$  этот интеграл равен нулю, и вывести отсюда ортогональность полиномов Лежандра. б)  $P_0(t) = 1$ ,  $P_1(t) = t$ ,  $P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$ ,  $P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$ ,  $P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$ ,

$$\begin{aligned}
 P_k(t) &= \frac{1}{2^k k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j \frac{(2j)!}{(2j-k)!} t^{2j-k} = \\
 &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2j-1)}{(k-j)! (2j-k)! 2^{k-j}} t^{2j-k}, \text{ где слагаемые с отрица-}
 \end{aligned}$$

тельными степенями  $t$  надо опустить. в)  $\sqrt{\frac{2}{2k+1}}$ . У к а з а -

н и е. Положить  $(t^2 - 1)^k = u_k(t)$ , показать, что  $\int_{-1}^1 u_k^{(k)}(t) u_k^{(k)}(t) dt = \frac{(k!)^2 \cdot 2^{2k+1}}{(2k)! 2k+1}$ , далее определить  $(P_k, P_k)$ . г)  $P_k(1) = 1$ . У к а з а -  
 н и е. Воспользоваться правилом Лейбница дифференцирования произведения.

**§ 5. 1.**  $S_1 = |a \times (b + c)|$ ,  $S_2 = |b \times (a + c)|$ . 2.  $\sin(\widehat{AB}) = \frac{OA \times OB + OB \times OC + OC \times OA}{|\overline{OB} - \overline{OA}| |\overline{OC} - \overline{OA}|}$ . 3.  $h_1 = \frac{|(r_1 - r_2) \times (r_3 - r_2)|}{|r_3 - r_2|}$  и т. д. 4. Имеем  $n_1 = r_2 \times r_1$ ,  $n_2 = r_3 \times r_2$ ,  $n_3 = r_1 \times r_3$ ,  $n_4 = (r_3 - r_1) \times (r_3 - r_1)$ , где  $r_1 = \overline{OA}$ ,  $r_2 = \overline{OB}$ ,  $r_3 = \overline{OC}$ ,  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0$ , откуда  $n_4^2 = (n_1 + n_2 + n_3)^2$ , или  $S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2n_1 n_2 + 2n_2 n_3 + 2n_3 n_1$ . Воспользоваться далее тем, что косинус

угла между гранями лишь знаком отличается от косинуса угла между нормальными к ним. 7.  $\left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right|^2 = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right|^2$ ,

где  $a_i, b_i$  — координаты  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в некотором прямоугольном базисе.

10. Указанные в задаче прямые коллинеарны векторам  $\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$ ,  $\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1)$ ,  $\mathbf{r}_3 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$ , где  $\mathbf{r}_i$  — векторы, коллинеарные ребрам угла. Далее применить результат задачи 8. 11. Пусть  $\overline{OA} = \mathbf{a}$ ,

$\overline{OB} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{OC} = \mathbf{c}$ ,  $\overline{OD} = \mathbf{d}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  — векторы, коллинеарные прямым  $p$  и  $q$ ; тогда  $\mathbf{ab} = \mathbf{cd} = 0$ ,  $\mathbf{p} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{d})$ ,  $\mathbf{q} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{d})$ .

Далее 4 раза воспользоваться результатом задачи 6 и показать, что

$\mathbf{pq} = 0$ . 12.  $S = \frac{1}{2} |(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|$ , откуда  $4S^2 = b^2 c^2 \sin^2 \alpha +$

$+ a^2 c^2 \sin^2 \beta + a^2 b^2 \sin^2 \gamma + 2abc^2 (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) + 2bca^2 (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) + 2acb^2 (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta)$ . 13. 2 ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ); объем параллелепипеда, построенного на диагоналях трех граней, проходящих через

одну вершину, в 2 раза больше объема исходного параллелепипеда.

14.  $\lambda_{\mu\nu} = -1$ . 15. Записать систему в векторной форме (см. задачу 14 к § 3) и умножить обе части ее на  $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ .

17. а) Вычислить  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$  двумя способами и приравнять полученные результаты. б) Воспользоваться результатом задачи 16а).

Формула означает, что объем параллелепипеда, ребра которого перпендикулярны граням исходного параллелепипеда и численно равны площадям этих граней, равен квадрату объема исходного параллелепипеда. 18. а) В силу формулы задачи 17а)  $(\mathbf{bcd})\mathbf{a} =$

$= (\mathbf{acd})\mathbf{b} + (\mathbf{adb})\mathbf{c} + (\mathbf{abc})\mathbf{d} = [\mathbf{a}(\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\mathbf{b} + [\mathbf{a}(\mathbf{d} \times \mathbf{b})]\mathbf{c} +$

$+ [\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\mathbf{d}$ . Далее заменить  $\mathbf{a}$  на  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ , использовать формулу задачи 6 и умножить обе части полученного равенства скалярно на  $\mathbf{z}$ . 19. Воспользоваться формулой задачи 18б).

§ 6. 1. а)  $\mathbf{e}_1' = -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_2' = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{x}_1' = -\sin \alpha \mathbf{x}_1 + \cos \alpha \mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_2' = \cos \alpha \mathbf{x}_1 + \sin \alpha \mathbf{x}_2$ ; б)  $\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2' = \mathbf{x}_2$ .

2. а)  $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . 3. а) Поменяются местами

две строки. б) Поменяются местами два столбца. в) Новая матрица будет центрально симметрична старой. 4.  $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 (\cos \varphi \cos \psi -$

$-\sin \varphi \sin \psi \cos \theta) + \mathbf{e}_2 (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) + \mathbf{e}_3 \sin \psi \sin \theta$ ,

$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 (-\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) + \mathbf{e}_2 (\cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) +$

$+ \mathbf{e}_3 \cos \psi \sin \theta$ ,  $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 \sin \varphi \sin \theta - \mathbf{e}_2 \cos \varphi \sin \theta + \mathbf{e}_3 \cos \theta$ . 6.  $\mathbf{e}_n' = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ ,

а  $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \dots, \mathbf{e}_{(n-1)'}$  произвольно. 7. Выбрать новый базис  $\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n'$  так, чтобы первые  $k$  векторов составляли базис  $L_k'$ . Записать условие принадлежности вектора  $\mathbf{x}$  пространству  $L_k'$  системой уравнений

в новом базисе, а затем написать соответствующую систему в старом базисе.

8. 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a & 1 & \dots & 0 \\ a^2 & -2a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n a^n & (-1)^{n-1} a^{n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
 В  $(k+1)$ -м столбце этой матрицы стоят числа  $(-a)^k$ ,  $C_k^{k-1}(-a)^{k-1}$ ,  $C_k^{k-2}(-a)^{k-2}$ , ...,  $C_k^1(-a)$ ,  $1$ ,  $0$ , ...,  $0$ .

§ 7. 1. а)  $(r-r_1, a, b)=0$ , 
$$\begin{vmatrix} x_1-x_1^{(1)} & x_2-x_2^{(1)} & x_3-x_3^{(1)} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,$$
 где  $r=x_i e_i$ ,  $r_1=x_1^{(1)} e_i$ ,  $a=a_i e_i$ ,  $b=b_i e_i$ ; б)  $(r-r_0, r_1-r_0, a)=0$ , 
$$\begin{vmatrix} x_1-x_1^{(0)} & x_2-x_2^{(0)} & x_3-x_3^{(0)} \\ x_1^{(1)}-x_1^{(0)} & x_2^{(1)}-x_2^{(0)} & x_3^{(1)}-x_3^{(0)} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0,$$
 где  $r=x_i e_i$ ,  $r_0=x_i^{(0)} e_i$ ,

$r_1=x_i^{(1)} e_i$ ,  $a=a_i e_i$ . 2. Условия пересечения:  $A_{ij}=\begin{vmatrix} a_i^{(1)} & a_i^{(2)} \\ a_j^{(1)} & a_j^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$ ,

условия параллельности:  $A_{ij}=0$ ,  $\frac{a_i^{(1)}}{b^{(1)}} \neq \frac{a_i^{(2)}}{b^{(2)}}$ , условия совпадения:

$A_{ij}=0$ ,  $\frac{a_i^{(1)}}{b^{(1)}} = \frac{a_i^{(2)}}{b^{(2)}}$ . 3.  $d = \frac{|b-b'|}{\sqrt{a_i a_i}}$ . 4.  $a_i x_i + \frac{b+b'}{2} = 0$ . 5.  $a_i^{(1)} x_i + b^{(1)} + \lambda (a_i^{(2)} x_i + b^{(2)}) = 0$ . 6. а)  $(a_i^{(2)} x_i^{(0)} + b^{(2)}) (a_i^{(1)} x_i + b^{(1)}) - (a_i^{(1)} x_i^{(0)} + b^{(1)}) (a_i^{(2)} x_i + b^{(2)}) = 0$ ; б)  $a_k^{(2)} a_k^{(3)} (a_i^{(1)} x_i + b^{(1)}) - a_k^{(1)} a_k^{(3)} (a_i^{(2)} x_i + b^{(2)}) = 0$ . 7.  $\cos \theta = \frac{a_k^{(1)} a_k^{(2)}}{\sqrt{a_i^{(1)} a_i^{(1)}} \sqrt{a_j^{(2)} a_j^{(2)}}}$ , условие

ортогональности:  $a_k^{(1)} a_k^{(2)} = 0$ . 8.  $\{a^{(2)} (b^{(2)})^2 a_i^{(1)} \pm a^{(1)} (b^{(1)})^2 a_i^{(2)}\} x_i + a^{(2)} (b^{(1)})^2 b^{(2)} \pm a^{(1)} (b^{(2)})^2 b^{(1)} = 0$ , где  $a^{(1)} = \sqrt{a_i^{(1)} a_i^{(1)}}$ ,

$a^{(2)} = \sqrt{a_i^{(2)} a_i^{(2)}}$ . 9.  $x_i^0 - (b + a_k x_k^{(0)}) \frac{a_i}{\sqrt{a_i a_i}}$ .

10.  $\frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_{ijp} \epsilon_{klp} (z_i - x_i) (z_j - x_j) (y_k - x_k) (y_l - x_l)}$ . 11.  $\frac{1}{6} \epsilon_{i/k} \times (u_i - x_i) (z_j - x_j) (y_k - x_k)$ . 12.  $d = \frac{|a \times (x_0 - y)|}{|a|}$ . 13.  $d = \frac{|a \times (x_2 - x_1)|}{|a|}$ . 14. а)  $\arccos \frac{a_1 a_2}{|a_1|}$ ; б)  $d = \frac{|(x_2 - x_1, a_1, a_2)|}{|a_1 \times a_2|}$ .

## Глава II

§ 1. 1. а), г), д). Будет. б) Не будет. в) Будет только при  $a=0$ . 2. а) При  $x = xl$ , где  $l$  — единичный вектор оси  $l$ ; г)  $(a, b, x) = (a \times b) x$ .

§ 2. 5. Не будет. 6. Будет только при  $a=0$ .

§ 3. 1. Только при  $a=0$ . 2. Не образует. 3, 4. Будет. 7, 8. Отдельно рассмотреть случаи, когда компоненты равны 0 и 1.

$$9. a_{i'j'k'l'm'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{k'k} \gamma_{l'l} \gamma_{m'm} a_{ijklm}. \quad 10. \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i'}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_{i'}} = \gamma_{i'i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \text{ так как из } x_i = \gamma_{ii'} x_{i'}, \text{ следует } \frac{\partial x_i}{\partial x_{i'}} = \gamma_{ii'} = \gamma_{i'i}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{i'} \partial x_{j'}} = \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j'}} \right) \frac{\partial x_{j'}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j'}} \gamma_{jj'} \right) \gamma_{ii'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

§ 4. 2.  $a_{ijk}b_{lm}$ ;  $a_{ijk}b_{im}$ ;  $a_{ijk}b_{li}$ ;  $a_{ijk}b_{jm}$ ;  $a_{ijk}b_{lj}$ ;  $a_{ijk}b_{km}$ ;  $a_{ijk}b_{lk}$ ;  $a_{ijk}b_{ij}$ ;  $a_{ijk}b_{ji}$ ;  $a_{ijk}b_{jk}$ ;  $a_{ijk}b_{kj}$ ;  $a_{ijk}b_{ik}$ ;  $a_{ijk}b_{ki}$ . 3. Для доказательства достаточности переписать условие теоремы в виде  $\frac{z_{ki}}{z_{kj}} = \frac{z_{li}}{z_{lj}}$ , вывести отсюда, что  $z_{ki} = z_{kj} \lambda_{ij}$ , и положить в последнем равенстве  $j=i$ . 4.  $a_{ii} = 1$ . 5. а) (16, 19, 41); б) (25, 21, 36); в) (37, 2, 16); г) (3, 20, 40); д) 186; е) 140; ж) 10; з)  $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ; и)  $(-3, 1, 8)$ ; к)  $-10$ . 6. Такой базис образуют, например, 9 тензоров, матрицы которых содержат 8 нулей и по одной единице на разных местах.

§ 5. 1. Показать, что коэффициенты  $a_{ijk}$  формы  $\varphi$  пропорциональны компонентам дискриминантного тензора  $\epsilon_{ijk}$ . 2. Воспользоваться тем, что среди индексов каждой компоненты такого тензора есть два равных. 4. Следует из того, что  $a_{ijk} = -a_{jki} = -a_{kji} = -a_{kij} = a_{ikj} = -a_{ijk}$ . 5. Рассмотреть отдельно слагаемые с  $i=j$  и  $i \neq j$ . 6. Привести подобные члены, приравнять коэффициенты при разных  $x_i x_j x_k$  нулю и воспользоваться симметрией  $a_{ijk}$  по первым индексам. 8. Первая часть решается аналогично первой части задачи 6. 12.  $(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . а) 6; б) 0; в) 0; г)  $(-1, 2, 1)$ ; д) 0; е) 9; ж)  $(4, 41, -3)$ ; з) 143. 13. а)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{\lambda}$  — сфера радиуса  $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$  (действитель-

ного или мнимого в зависимости от знака  $\lambda$ ); б)  $(a_i x_i)(b_j x_j) = 1$ ; после преобразования координат уравнение примет вид  $x_1' x_2' = 1$ , т. е. имеем гиперболический цилиндр. 14. а)  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ; б)  $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1$ ; в)  $x_1^2 - 3x_1 x_2^2 = 1$ .

### Глава III

§ 1. 2. а) — г) Являются: а) отражение от начала, б) вектор  $x$  переходит в вектор, лежащий на биссектрисе первого и третьего координатных углов и имеющий с  $x$  одну и ту же первую координату, в) растяжение вдоль  $e_2$  в 2 раза и последующее отражение от  $e_1$ , г) растяжение вдоль  $e_1$  в  $\lambda_1$  раз и последующее растяжение вдоль  $e_2$  в  $\lambda_2$  раз; если  $\lambda_1 < 0$ , то первое растяжение надо дополнить отражением от  $e_2$ , аналогично при  $\lambda_2 < 0$ . д) Не является. 3.  $u = Ax = \lambda x_1 e_1 + x_2 e_2$ . 5. а) Является; проектирование на  $a$  и последующее растяжение в  $a^2$  раз. б) Не является. в) Является только при  $a = 0$ . г) Является. д) Является; проектирование на плоскость  $e_1, e_2$ . е) Является; отражение от плоскости  $e_1, e_3$ , последующее отражение от плоскости  $e_1, e_2$  и растяжение вдоль  $e_3$  в 2 раза. ж) Является; сжатие к плоскости  $e_1, e_2$ . з) Является. и) Не является. 6. Воспользоваться свойствами проекций. 9. Только операция задачи в), если  $H(t, s)$  имеет вид многочлена степени не выше  $n$  относительно  $t$  с коэффициентами, являющимися функциями от  $s$ . Она будет линейным преобразованием и в пространстве многочленов, степень которых не превосходит  $n$ .

§ 2. 1. Для задачи 2: а)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Для задачи 3:  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 3. Для задачи 5:

а)  $A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}$ , где  $a = a_i e_i$ ; в) при  $a = 0$   $A = N$ ;

г)  $A = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $a = a_i e_i$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  в зависимости от

того, будет ли базис правым или левым; д)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

е)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ; ж)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ; з)  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ . Для

задачи 6:  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ . Для задачи 7:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

если  $e_1$  переходит в  $e_2$ , и  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , если  $e_2$  пе-

реходит в  $e_1$ . 5. а)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

6. Если  $a_i = a_{ij}e_j$ ,  $b_i = b_{ij}e_j$  и  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ , то матрица перехода имеет вид  $C = (c_{ik})$ , где  $c_{ij} = \frac{a_{ij}B_{kj}}{|B|}$ ; здесь  $B_{kj}$  — алгебраическое дополнение элемента  $b_{kj}$  и  $|B|$  — определитель матрицы  $B$ .

7.  $C = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . 8. а) Отражение от плоскости  $e_2, e_3$ . б) Растя-

жение в  $\lambda$  раз вдоль  $e_2$ . в) Проектирование на плоскость  $e_1, e_3$ . г) Проектирование на  $e_2$ . 9.  $A = (a_{ik})$ , где  $a_{ik} = \omega_i \omega_k + (1 - \omega_i \omega_k) \cos \alpha + \varepsilon_{ijk} \omega_j \sin \alpha$ .

§ 3. 2. Преобразования примеров а), б), д), ж), з) из текста § 1 и упр. 2а), в) г), 3, 4, 5е) ж), з), 7 к § 1 — невырожденные, а преобразования примеров в), е) и упр. 2б), 5а), в) при  $\alpha = 0$ , г) д), 6, 8 — вырожденные (ранги их матриц равны соответственно 0, 1, 1, 1, 0, 2, 2, 1,  $n$ ). 3.  $C = (c_{ik})$ , где: а)  $c_{ik} = a_{1i}b_{1k} + a_{2i}b_{2k}$ ; б)  $c_{ik} = a_{1i}b_{1k} + a_{2i}b_{2k}$ ,  $b_{\alpha} = b_{\alpha j}e_j$  ( $\alpha = 1, 2$ ;  $i, j, k = 1, 2, 3$ ); ранг  $C$  равен: а) 2; б) 1. 4. а) Вырожденное, ранг равен 1; векторы  $L_2$  переходят в векторы прямой  $x_2 = 2x_1$ . б) Вырожденное, ранг равен 2; векторы  $L_3$  переходят в векторы плоскости  $x_1 + x_2 = x_3$ . в) Вырожденное, ранг равен 1; векторы  $L_3$  переходят в векторы прямой  $x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3}$ . 5. Показать, что для выполнения свойств а) — г) необходимо и достаточно, чтобы ранг  $A$  был равен трем. 8. Воспользоваться результатом задач 5а), г). 9. а) Ядро — векторы, коллинеарные  $e_2$ , область значений — векторы, коллинеарные  $ae_1 + e_2$ , ранг и дефект равны 1. б) Ядро — векторы, коллинеарные  $e_2$ , область значений — векторы плоскости  $e_1, e_3$ , ранг и дефект равны 2 и 1. в) Ядро — векторы плоскости  $e_1, e_2$ , область значений — векторы, коллинеарные  $e_3$ , ранг и дефект равны 1 и 2. г) Ядро — векторы, коллинеарные  $e_2$ , область значений — векторы

плоскости  $e_1, e_3$ , ранг и дефект равны 2 и 1. 10. Ядро — многочлены нулевой степени, область значений — совокупность многочленов, степень которых не превосходит  $n-1$ , ранг и дефект равны  $n$  и 1.

§ 4. 1. а)  $\varphi = x_1^2, x_1^2 = 1$  — пара параллельных  $e_2$  прямых; б)  $\varphi = -x_1^2 - x_2^2, x_1^2 + x_2^2 = -1$  — окружность мнимого радиуса; в)  $\varphi = x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_2^2 = 1$  — равнобочная гиперболоид; г)  $\varphi = x_1^2 + 3x_2^2, x_1^2 + \frac{x_2^2}{3} = 1$  — эллипс с полуосями 1 и  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; д)  $\varphi = x_1^2 + \lambda x_2^2,$

$x_1^2 + \frac{x_2^2}{\lambda} = 1$  — эллипс ( $\lambda > 0$ ) или гиперболоид ( $\lambda < 0$ ) с полуосями 1 и  $\frac{1}{\lambda}$

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \right)$ ; е)  $\varphi = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2, \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$  — эллипс, если  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ; гиперболоид, если  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ; мнимый эллипс, если  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ . 2. а)  $\varphi = x_1^2, x_1^2 = 1$  — пара плоскостей, параллельных плоскости  $e_1, e_3$ ; б)  $\varphi = x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2 = 1$  — прямой круговой цилиндр; в)  $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$  — однополостный гиперболоид вращения; г)  $\varphi = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2, x_1^2 - \frac{x_2^2}{2} + x_3^2 = -1$  — дву-

полостный гиперболоид вращения; д)  $\varphi = a_i a_k x_i x_k, a_i a_k x_i x_k = 1$ , после преобразования координат примет вид  $x_1^2 = 1$  — пара параллельных плоскостей; е)  $\varphi = (a_i a_k + b_i b_k) x_i x_k, (a_i a_k + b_i b_k) x_i x_k = 1$  — гиперболоидический цилиндр (см. задачу 136) § 5 гл. II). 3. а)  $u^* = A^* x = x_1 e_1 + (2x_1 + x_2) e_2 + x_3 e_3$ ; б)  $u^* = A^* x = x_2 e_1 - x_1 e_2 + x_3 e_3, A = A_1 + A_2$ , где  $A_1 x = x_3 e_3, A_2 x = -x_2 e_1 + x_1 e_2$ ; в)  $u^* = A^* x = (bx) a, A = A_1 + A_2$ , где  $A_1 x = \frac{(ax) b + (bx) a}{2}, A_2 x = \frac{(ax) b - (bx) a}{2}$ ; г)  $u^* = A^* x = \frac{(a_{1k} b_{1i} + a_{2k} b_{2i}) x_i e_k = (b_1 x) a_1 + (b_2 x) a_2}{(a = 1, 2; i, j = 1, 2, 3); A = A_1 + A_2, \text{ где } A_1 x = \frac{(a_1 x) b_1 + (b_1 x) a_1 + (a_2 x) b_2 + (b_2 x) a_2}{2}, A_2 x = \frac{1}{2} [(a_1 x) b_1 - (b_1 x) a_1 + (a_2 x) b_2 - (b_2 x) a_2]}$ ; д)  $u^* = A^* x = x \times a, A = A_1 + A_2, A_1 = N, A_2 x = a \times x$ . 5. Да. 7. Представить  $x$  в виде  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1$  — проекция  $x$  на  $\pi$  параллельно  $l$ , а  $x_2$  — проекция  $x$  на  $l$  параллельно  $\pi$ . Тогда  $Ax = x_1 - x_2$ . Показать далее, что для выполнения равенства  $uAx = xAu$  необходимо и достаточно, чтобы  $l \perp \pi$ . 8. в), г) Применить интегрирование по частям.

$$\S \quad 5. \quad 2. \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}. \quad 3. \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\frac{a_1}{a_2} \sin \alpha \\ \frac{a_2}{a_1} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

4. а), б), в) Применить метод математической индукции.



5.  $A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$ . 8. Воспользоваться формулой (1) § 4 и опре-

делением произведения преобразований. 12. Воспользоваться теоремой из § 3 (стр. 98). 14, 15. Приравнять соответствующие элементы матриц  $AB$  и  $BA$  и воспользоваться произвольностью  $B$ .

16. а)  $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a, b, c$  — любые числа.

17.  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ , где  $a, b, c$  — любые числа, удовлетворяющие равенству  $a^2 + bc = 0$ . 18.  $\pm E$  и  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ , где  $a, b, c$  — любые числа, удовлетворяющие равенству  $a^2 + bc = 1$ . 20. Идемпотентны.

22.  $A^{n+1}P(t) = P^{(n+1)}(t) = 0$ ,  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \cdot 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ,

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 2 \cdot 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot 3 \cdot 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2)(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  и т. д. Ранг  $A^2$ ,

$A^3, \dots$  равен  $n-1, n-2, \dots$ , дефект:  $2, 3, \dots$ , область значений — многочлены степени, не превосходящей  $n-2, n-3, \dots$ . 23. б) Преобразование  $B$  повышает степень многочленов, поэтому его можно рассматривать только в пространстве всех многочленов.

§ 6. 1. а)  $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

г)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix}$ ; д)  $\frac{1}{23} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 14 \\ 8 & 6 & 5 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ . 2. а)  $\begin{pmatrix} 59 \\ 37 \end{pmatrix}$ ; б)  $\frac{1}{23} \begin{pmatrix} 16 \\ 35 \\ 108 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 33 & 27 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$ ; г)  $\frac{1}{23} \begin{pmatrix} -5 & -10 & -16 \\ 144 & 127 & 56 \\ 173 & 176 & 89 \end{pmatrix}$ .

§ 7. 1. а), в), д), е) Да. б), г), ж) Нет. 2. а) Симметрии относительно диагоналей, повороты вокруг центра на  $180^\circ$  и  $360^\circ$ . б) Симметрии относительно диагоналей и средних линий, повороты вокруг центра на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$ . в) Симметрии относительно высот, повороты вокруг центра на  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $360^\circ$ . г) Симметрии относительно диагоналей, соединяющих противоположные вершины, повороты вокруг центра на  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $360^\circ$ . Все эти совокупности преобразований являются группами. 3. а), б), в), д), е), ж), з), и), к) Образуют. г) Не образуют. 4. а), б), г), д), ж) Образуют. в) е) Не образуют. 5. Например, 3а) — подгруппа 3б), а 3а) и 3б) — подгруппы 3в). 7. Диагональные элементы равны 1 или  $-1$ .

$$8. \quad a) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad б) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}; \quad в) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ если оси вращения взять за оси координат.}$$

#### Глава IV

§ 1. 2. а) Векторы, коллинеарные  $b$ ;  $\lambda = ab$ ; б)  $\lambda = 0$ , собственные векторы коллинеарны  $a$ ; в)  $x = \omega$ ,  $\lambda = 1$ ; г)  $x_1 = a \times b$ ,  $x_2 = a + b$ ,  $x_3 = a - b$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = ab + a^2$ ,  $\lambda_3 = -ab + a^2$ ; д)  $x_1 = a + b + c$ , собственным будет также любой вектор плоскости, перпендикулярный вектору  $x_1$ ,  $\lambda_1 = a^2 + 2ab$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = a^2 - ab$ .

$$3. \quad a) \quad x = (e_1 + e_2 + e_3) \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \lambda = 1; \quad б) \quad x_1 = (e_1 + e_2 + e_3) \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x_2 = (e_1 + e_2 - 2e_3) \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-e_1 + e_2); \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

$$4. \quad a) \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4; \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 - e_2), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (e_1 + 2e_2); \quad б) \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1; \quad x_1 = e_1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 + e_3), \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_2 - e_3);$$

$$в) \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 9; \quad x_1 = (e_1 + e_2 - e_3) \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x_2 = (e_1 - e_2) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3 = (e_1 + e_2 + 2e_3) \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad г) \quad \lambda = a, \quad x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^4 + a^2 + 1}} (a^2 e_1 + a e_2 + e_3); \quad д) \quad \lambda = a, \quad x = e_3; \quad е) \quad \lambda_1 = a_1,$$

$\lambda_2 = b_2, \lambda_3 = c_3; x_1 = e_3, x_2 = -b_1 e_1 + (a_1 - b_2) e_2, x_3 = (b_1 c_2 - b_2 c_1 + c_1 c_3) e_1 + c_2 (c_3 - a_1) e_2 + (c_3 - b_2) (c_3 - a_1) e_3$ . 8. Показать, что  $|A^{-1} - \lambda E| = -\lambda^3 |A^{-1}| \left| A - \frac{1}{\lambda} E \right|$ . 9. Показать, что коэффициенты  $I_1, I_2, I_3$  характеристического уравнения для матриц  $AB$  и  $BA$  одинаковы. 10. Показать, что если  $\alpha$  — угол поворота, то  $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$ . Вывести отсюда, что  $2 \cos \alpha = a_{ii} - 1$ . Ось вращения найти как собственный вектор, соответствующий  $\lambda_1 = 1$ . Вектор оси:  $\omega = (a_{13} + a_{31}) e_1 + (a_{23} + a_{32}) e_2 + (1 - a_{ii}) e_3$ . 11.  $\alpha = \arccos \frac{1}{5}, \omega = e_3$ . 12. Матрица искомого преобразования:  $B = A^{-1} = A^*$ . 13. Перемножить равенства  $|A - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda) \times (\lambda_2 - \lambda) (\lambda_3 - \lambda), |A + \lambda E| = (\lambda_1 + \lambda) (\lambda_2 + \lambda) (\lambda_3 + \lambda)$  и заменить  $\lambda^2$  на  $\lambda$ . 14. Разложить преобразование  $A^2 - \mu^2 E$  на множители. 17. Любое число  $\alpha$  — собственное значение,  $ce^{\alpha x}$  — соответствующие собственные векторы. 18.  $\lambda = 0$  — единственное собственное значение, соответствующие собственные векторы — многочлены нулевой степени.

§ 2. 2. Примеры § 1: а) базис любой;  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ; б)  $\{e_1, e_2\}$ ,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ; д)  $\{e_1, e_2, e_3\}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ . Задачи к § 1: 2. г)  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -ab + a^2 \end{pmatrix}$ . 4. а)  $\{x_1, x_2\}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ; б)  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ,

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; в)  $\{x_1, x_2, x_3\}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ; е)  $\{x_1, x_2, x_3\}, \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ .

3.  $\alpha_2^2 \neq \alpha_1 \alpha_3; \alpha_1 \alpha_3 > 0$ .

6. Для собственного ортогонального преобразования показать, что матрица имеет вид  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , где  $a^2 + b^2 = 1$ . Показать, что несобственное ортогональное преобразование имеет действительные собственные значения и собственные векторы, и перейти к базису из собственных векторов. 7. Показать, что всегда есть одно действительное собственное значение, равное  $+1$  или  $-1$ , для соответствующего ему собственного вектора  $x$  имеем  $Ax = \pm x$ ; перпендикулярная к  $x$  плоскость инвариантна относительно  $A$ .

§ 3. 1.  $\begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$ . 4. а) Воспользоваться тем, что  $A^3 = I_1 A^2 - I_2 A + I_3 E$ ; б)  $A(\alpha a + \beta a_1) = \alpha a_1 + \beta a_2$ , но  $a_2$  компланарен пло-

скости  $a, a_1; \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_3 \\ 1 & 0 & -I_2 \\ 0 & 1 & I_1 \end{pmatrix}$ . 5. Показать, что из  $AB - BA = E$  следует  $A^k B - B A^k = k A^{k-1}$  и для любого многочлена  $f(\lambda)$ , тогда  $f(A)B - Bf(A) = f'(A)$ , но это не выполняется для многочлена  $g(\lambda)$  минимальной степени, для которого  $g(A) = 0$ .

§ 4. 2. Принять собственные векторы за базис, воспользоваться инвариантностью понятия «симметричная матрица». 3. Показать, что подпространство собственных векторов одного преобразования, соответствующих одному и тому же собственному значению, инвариантно относительно другого. 4. Доказывается аналогично таким же свойствам симметричного преобразования.

§ 5. 1. а)  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_3), \frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 - 2e_2) \right\}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ ; б)  $\left\{ \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + 3e_3), \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - 2e_3), \frac{1}{3}(-2e_1 + 2e_2 - e_3) \right\}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\left\{ \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - 2e_3), \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + 2e_3), \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3) \right\}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ; г)  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3), e_2 \right\}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ .

2. а)  $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2^{82} + 7^{30} & 2^{81} - 2 \cdot 7^{30} \\ 2^{81} - 2 \cdot 7^{30} & 2^{80} + 4 \cdot 7^{30} \end{pmatrix}$ ;

б)  $3^{28} \begin{pmatrix} 1 + 2^{82} + 4 \cdot 3^{30} & 2 + 2^{81} - 4 \cdot 3^{30} & 2 - 2^{82} + 2 \cdot 3^{30} \\ 2 + 2^{81} - 4 \cdot 3^{30} & 4 + 2^{80} + 4 \cdot 3^{30} & 4 - 2^{81} - 2 \cdot 3^{30} \\ 2 - 2^{82} + 2 \cdot 3^{30} & 4 - 2^{81} - 2 \cdot 3^{30} & 4 + 2^{82} + 3^{30} \end{pmatrix}$ .

Указание. Привести матрицу к диагональному виду (см. задачи 1а), б)), возвести в степень и совершить переход к старому базису. 3. а) Для доказательства необходимости применить преобразование  $A$  к собственным векторам, а для доказательства достаточности рассмотреть базис из собственных векторов. б) Построить преобразование  $B$  по формулам  $Be_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$  (нет суммирования,  $i = 1, 2, 3$ ), где  $\{e_1, e_2, e_3\}$  — базис из собственных векторов  $A$ . в) Показать, что если все  $\lambda_i$  различны, то матрица  $C$  диагональна; если  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , то  $c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0$ . В каждом из случаев (в том числе и при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ) равенство  $BC = CB$  проверить непосредственно. г)  $x(A+B)x = xAx + xBx \geq 0$ ,  $(A+B)^* = A^* + B^* = A + B$ . д) Пусть  $A_1^2 = A$ ,  $B_1^2 = B$ ,  $C = A_1 B_1$ . Показать, что  $A_1 B_1 = B_1 A_1$ ,  $C^2 = AB$ , и потому  $AB$  неотрицательно. Симметричность вытекает из задачи 6а) к § 5 гл. III. е) Воспользоваться г) и д). ж) Применить результат задачи 6 из § 1.

4. а)  $B = \frac{1}{3}A$ ; б)  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ . 5. Показать, что ортогональное симметричное преобразование имеет собственными значениями 1 и  $-1$ .

§ 6. 1. а)  $\varphi = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ ; б)  $\varphi = 2x_1^2$ ; в)  $\varphi = \frac{1}{2}(3x_1^2 + x_2^2)$ ; г)  $\varphi = 4x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2$ ; д)  $\varphi = x_1^2 + \sqrt{3}x_2^2 - \sqrt{3}x_3^2$ . 2. а)  $\varphi = x_1^2 + 9x_2^2$ ,  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\varphi = x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2$ ,

$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ; в)  $\varphi = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2$ ,  $\Gamma = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ; г)  $\varphi = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$ ,  $\Gamma = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ;

д)  $\varphi = 7x_1^2 - 2x_2^2 + 7x_3^2$ ,  $\Gamma = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & -3\sqrt{2} \\ 4 & 2 & 4 \\ \sqrt{2} & -4\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

3. а)  $a > \frac{1}{3}$ ; б)  $a > 2$ ; в)  $|a| < \frac{5}{3}$ . 4. В базисе из единичных собственных векторов  $\{e_1, e_2\}$  имеем  $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2) \leq \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \leq \lambda_2(x_1^2 + x_2^2)$ . Далее воспользоваться инвариантностью  $x_1^2 + x_2^2$ . 5. Показать, что собственные значения матрицы  $A - xE$  получаются вычитанием  $x$  из собственных значений матрицы  $A$ . 6. а) Однополостный гиперболоид вращения с осью  $e_3$ . б) Двуполостный гиперболоид вращения с осью  $e_3$ . в) Эллипсоид. г) Однополостный гиперболоид. д) Двуполостный гиперболоид. е) Мнимый эллипсоид.

§ 7. 2. Надо отправляться от преобразования  $A^*A$ . 3. а)  $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4+\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \times$   
 $\times \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ; в)  $A = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

## Глава V

2. Кривые первого типа имеют единственный центр, кривая второго типа (парабола) не имеет центра, кривые третьего типа имеют прямую центров. 3. а) Эллипс  $\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{1} = 1$ , центр  $O' (2, 3)$ , угловой коэффициент большой оси  $k = -\frac{1}{2}$ . б) Эллипс  $\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{1} = 1$ , центр  $O' (1, 1)$ , угловой коэффициент большой оси  $k = -1$ . в) Гипербола  $\frac{x_1^2}{1} - \frac{x_2^2}{9} = 1$ , центр  $O' (-1, 2)$ , угловой коэффициент действительной оси  $k = 3$ . г) Гипербола  $\frac{x_1^2}{9} - \frac{x_2^2}{25} = 1$ , центр  $O' (1, 0)$ , угловой коэффициент действительной оси  $k = -3$ . д) Парабола, параметр  $p = 1$ , вершина  $O' (0, 0)$ , вектор, параллельный оси и направленный в сторону вогнутости,  $\left\{ \frac{4}{3}, -\frac{3}{5} \right\}$ . е) Мнимый эллипс. ж) Пара пересекающихся прямых, уравнение которых в результате двух последовательных преобразований  $x_1 = x_1' - 2$ ,  $x_2 = x_2'$ , и  $x_1' = \frac{x_1'' + 3x_2''}{\sqrt{10}}$ ,  $x_2' = \frac{-3x_1'' + x_2''}{\sqrt{10}}$  приводится к виду  $x_1''^2 - 4x_2''^2 = 0$ . з) Пара мнимых пересекающихся в действительной точке прямых; их уравнение  $2x_1''^2 + 3x_2''^2 = 0$  получается в результате двух последовательных преобразований  $x_1 = x_1'$ ,  $x_2 = x_2' - 2$  и  $x_1' = \frac{x_1'' - x_2''}{\sqrt{2}}$ ,  $x_2' = \frac{x_1'' + x_2''}{\sqrt{2}}$ . и) Пара параллельных прямых, уравнение которых после двух последовательных преобразований  $x_1 = \frac{3x_1' - 2x_2'}{\sqrt{13}}$ ,  $x_2 = \frac{2x_1' + 3x_2'}{\sqrt{13}}$  и  $x_1' = x_1'' + \frac{4}{\sqrt{13}}$ ,  $x_2' = x_2''$  приводится к виду  $x_1''^2 = 1$ . к) Пара мнимых параллельных прямых, уравнение которых в результате двух последовательных преобразований  $x_1 = \frac{1}{5}(3x_1' - 4x_2')$ ,  $x_2 = \frac{1}{5}(4x_1' + 3x_2')$  и  $x_1' = x_1''$ ,  $x_2' = x_2'' - 4$  приводится к виду  $x''^2 + 1 = 0$ . 4.  $\alpha = 1$ . 5.  $\alpha = \frac{1}{2}$ . 6.  $\alpha = 4\beta$ ,  $x + \beta y - 3 = 0$ ,  $2x + 2\beta y - 1 = 0$ . 7. а) Сфера с центром в точке  $O' (3, -4, -5)$  и радиусом  $R = 7$ . б) Эллипсоид  $\frac{x_1^2}{6} + \frac{x_2^2}{3} + \frac{x_3^2}{2} = 1$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{3}(2x_1' + 2x_2' - x_3') + 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(2x_1' - x_2' + 2x_3')$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}(-x_1' + 2x_2' + 2x_3') - 1$ . в) Однополостный

гиперболоид  $x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_3^2}{2} = 1$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{3}(-x_1' + 2x_2' + 2x_3')$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(2x_1' - x_2' + 2x_3') - 1$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}(2x_1' + 2x_2' - x_3') + 1$ . г) Конус  $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 = 0$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{3}(-2x_1' - 2x_2' + x_3') - 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(-2x_1' + x_2' + 2x_3') - 1$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}(2x_1' + 2x_2' - x_3') - 1$ . д) Эллиптический параболоид  $2x_3 = x_1^2 + 2x_2^2$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{3}(-2x_1' - 2x_2' + x_3') + 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(-2x_1' + x_2' - 2x_3')$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}(x_1' - 2x_2' - 2x_3')$ . е) Гиперболический параболоид  $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{3}(-2x_1' - 2x_2' + x_3')$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(-2x_1' + x_2' - 2x_3') - 1$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}(x_1' - 2x_2' - 2x_3') - 1$ . ж) Эллиптический цилиндр  $\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 = 1$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{3}(2x_1' + 2x_2' + x_3') - t - 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(2x_1' - x_2' - 2x_3') + 2t + 1$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}(-x_1' + 2x_2' - 2x_3') + 2t$ . з) Гиперболический цилиндр  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{3}(2x_1' + 2x_2' + x_3') + t$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(2x_1' - x_2' - 2x_3') - 2t$ ,  $x_3 = (-x_1' + 2x_2' - 2x_3') - 2t$ . и) Параболический цилиндр  $x_2^2 = 2x_1$ ; формулы перехода, как в з). к) Две пересекающиеся плоскости  $x_1^2 - x_2^2 = 0$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{9}(4x_1' - 4x_2' + 7x_3') - 7t$ ,  $x_2 = \frac{1}{9}(x_1' + 8x_2' + 4x_3') - 4t$ ,  $x_3 = \frac{1}{9}(-8x_1' - x_2' + 4x_3') - 4t$ . л) Две мнимые, пересекающиеся по действительной прямой плоскости  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{3}(x_1' - 2x_2' - 2x_3') + 2t$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(-2x_1' + x_2' - 2x_3') + 2t$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}(2x_1' - 2x_2' - x_3') + t$ . м) Две параллельные плоскости  $x_1^2 = 1$ ; формулы перехода:  $x_1 = \frac{1}{7}(6x_1' - 3x_2' + 2x_3') + 3t - 2n$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(3x_1' + 2x_2' - 6x_3') - 2t + 6n$ ,  $x_3 = \frac{1}{7}(2x_1' + 6x_2' + 3x_3') - 6t - 3n$ . н) Две совпадающие плоскости

$x_1^2 = 0$ ; формулы перехода те же, что и в м). о) Мнимый конус  $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 0$ ; формулы перехода:  $x_1 = x_1', -2$ ,  $x_2 = x_2' + 3$ ,  $x_3 = x_3' + 2$ . п) Двуполостный гиперболоид  $\frac{x_1'^2}{5} + \frac{x_2'^2}{15} - \frac{x_3'^2}{25} = 1$ , центр

$$\left(0, 1, -\frac{2}{5}\right), \quad e_1' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \quad e_2' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\},$$

$$e_3' = \{0, 0, 1\}. \quad \text{р) Круглый цилиндр } (x_1 - 1)^2 + \left(x_2 + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

с) Конус вращения  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 = 0$ , вершина  $(1, 1, -1)$ , вектор, параллельный оси конуса,  $\{2, 1, -2\}$ . 8. а)  $x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$ ;

б)  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  и  $ax_1 + bx_2 - (a+b)x_3 = 0$ ; в)  $a(x_1 + 2) + b(x_2 - 1) + c(2x_3 + 9) = 0$ . 9.  $5(\alpha^2 + \beta^2 + 1) = (\alpha + 2\beta + 1)^2$ .

10. а)  $I_3 = I_4 = 0$ ,  $I_1^2 = 4I_2$ ,  $I_1K_3 < 0$ ; б)  $I_4 = 0$ ,  $I_1I_3 \leq 0$  или  $I_2 \leq 0$  и равны два корня характеристического уравнения; в)  $I_4 < 0$ ,  $3I_2 = I_1^2$ ,  $27I_3 = I_2^2$ ; г)  $I_3 = 0$ ,  $I_4 < 0$ ,  $I_1^2 = 4I_2$ ; д)  $I_3 = I_4 = K_3 = I_1 = 0$ ,  $I_2 \neq 0$ .

$$11. \frac{\pi \sqrt{-I_4^3}}{I_3^3}. \quad 12. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{-I_2}}{I_1}. \quad 13. 2 \frac{\sqrt{-K_2}}{|I_1|}. \quad 14. \alpha = \pm 1, \beta = \pm \sqrt{2}.$$

$$15. \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad x_3 = 0, x_1 = \frac{\sqrt{5} \mp 1}{2} x_2.$$

## Глава VI

**§ 1. 1. а)** Если вектор  $e_s$  направлен вдоль стержня, то  $I_{ij} = \frac{mI^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{mI^2}{12} (x_1^2 + x_2^2) = 1$ . б) Если вектор  $e_s$  направ-

лен перпендикулярно плоскости диска, то  $I_{ij} = \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

$\frac{mR^2}{4} (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) = 1$ . в) Если вектор  $e_s$  перпендикулярен пластине,

а  $e_1$ ,  $e_2$  параллельны ее сторонам  $a$  и  $b$ , то  $I_{ij} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$ ,

$$\frac{m}{12} [b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 + (a^2 + b^2) x_3^2] = 1. \quad \text{г) } I_{ij} = \frac{2}{5} mR^2 \delta_{ij},$$

$\frac{2}{5} mR^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1$ . д) Если вектор  $e_s$  направлен по оси цилиндра,



$$\text{то } I_{ij} = \frac{m}{4} \begin{pmatrix} R^2 + \frac{h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + \frac{h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{m}{4} \left[ \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right) (x_1^2 + x_2^2) + 2R^2 x_3^2 \right] = 1.$$

$$\text{е) } I_{ij} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{m}{12} [(b^2 + c^2) x_1^2 + (c^2 + a^2) x_2^2 + (a^2 + b^2) x_3^2] = 1. \text{ ж) } I_{ij} = \frac{m}{5} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{m}{5} [(b^2 + c^2) x_1^2 + (c^2 + a^2) x_2^2 + (a^2 + b^2) x_3^2] = 1. \text{ 2. Если } O' - \text{центр вращения, } O - \text{центр инерции и вектор } e_3 \text{ направлен вдоль оси } O'O, \text{ то}$$

$$\text{а) } I'_{ij} = \frac{3m}{20} \begin{pmatrix} R^2 + 4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + 4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{3m}{20} [(R^2 + 4h^2) (x_1^2 + x_2^2) + 2R^2 x_3^2] = 1; \text{ б) } I'_{ij} = \frac{mR^2}{5} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{mR^2}{5} [7(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3^2] = 1;$$

$$\text{в) } I'_{ij} = \frac{m}{4} \begin{pmatrix} R^2 + \frac{4h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + \frac{4h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{m}{4} \left[ \left( R^2 + \frac{4h^2}{3} \right) (x_1^2 + x_2^2) + 2R^2 x_3^2 \right] = 1. \text{ 3. а) } I_{ij} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } I = \frac{1}{m} \sum_{\alpha \neq \beta} m_\alpha m_\beta l_{\alpha\beta}^2, \quad m = \sum_\alpha m_\alpha. \text{ б) Если } e_1 \text{ параллелен } AB, \text{ а } e_3 \text{ перпендикулярен плоскости}$$

$$\text{треугольника, то } I_{11} = \frac{2m_1 m_2}{2m_1 + m_2} h^2, \quad I_{22} = \frac{m_1}{2} a^2, \quad I_{33} = I_{11} + I_{22}, \quad I_{12} = I_{23} = I_{13} = 0. \text{ в) } I_{ij} = m a^2 \delta_{ij}. \text{ 4. } T = \frac{m\omega^2}{12} \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$M = \frac{m\omega}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} [(b^2 + c^2) a e_1 + (c^2 + a^2) b e_2 + (a^2 + b^2) c e_3].$$

$$\text{5. Если } \omega = \frac{R e_1 + \frac{h}{2} e_3}{\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}}}, \quad \text{то } T = \frac{m\omega^2 R^2}{12} \frac{6R^2 + 5h^2}{4R^2 + h^2}, \quad M = \frac{m\omega}{4} \left[ \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right) R e_1 + R^2 h e_3 \right].$$

§ 2. 1. а)  $\sigma_1 = 25 \cdot 10^7$ ,  $\sigma_2 = 4 \cdot 10^7$ ,  $\sigma_3 = 16 \cdot 10^7$ ;  $e_1^0 = e_1$ ,  $e_2^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3$ ,  $e_3^0 = -\frac{1}{2} e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_3$ ; б)  $10^7 (25x_1^2 + 7x_2^2 + 13x_3^2 - 6\sqrt{3}x_2x_3) = 1$ ,  $10^7 [25(x_1^0)^2 + 4(x_2^0)^2 + 16(x_3^0)^2] = 1$ ; в)  $J = (-e_2 + 5\sqrt{3}e_3) \times$   
 $\times 10^7 (a \cdot M^{-2})$ . 2.  $E_i = \rho_{ik} j_k$ . 3.  $\rho_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{64} & \frac{3\sqrt{3}}{64} \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{64} & \frac{7}{64} \end{pmatrix} \cdot 10^{-7}$ .  
 4. а)  $6,5(x_1^2 + x_2^2) + 11,3x_3^2 = 1$ ; б)  $\frac{x_1^2 + x_2^2}{6,5} + \frac{x_3^2}{11,3} = c$ . 5. а)  $\alpha_{ij} =$   
 $= \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ; б)  $p = \frac{E}{4\pi} (2e_1 + 2e_2)$ ,  $D = E(3e_1 + 2e_2)$ ;  
 в)  $(p, \hat{e}_1) = 45^\circ$ ,  $(D, \hat{e}_1) = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$ ,  $\text{Пр}_{e_1} p = \frac{E}{2\pi}$ ,  $\text{Пр}_{e_1} D = 3E$ ;  
 г)  $e_1^0 = \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\}$ ,  $e_2^0 = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$ ,  $e_3^0 = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right\}$ ,  
 $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $\epsilon_3 = 7$ .

§ 3. 1.  $\sigma_{ij} = l_i l_j$ . 2. У к а з а н и е. Из того, что след тензора  $\sigma_{ij}$  равен нулю, вытекает, что уравнение  $\sigma_{ij} x_i x_j = 0$  определяет действительный конус. За вектор  $e_1^0$  следует принять любой вектор, лежащий на этом конусе. Тогда плоскость, перпендикулярная вектору  $e_1^0$ , проходящая через начало координат, пересечет этот конус по двум взаимно перпендикулярным прямым. Если направить векторы  $e_2^0$  и  $e_3^0$  вдоль этих прямых, то в базисе  $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$  тензор  $\sigma_{ij}$  примет указанный вид. 3.  $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}$ , где  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ ,  $\sigma''_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ . 4. а)  $e_1^0 = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$ ,  $e_2^0 = \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\}$ ,  $e_3^0 = \left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$ ,  $\sigma_1 = 5$ ,  $\sigma_2 = 11$ ,  $\sigma_3 = -1$ ; б)  $7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3 = 1$ ,  $5(x_1^0)^2 + 11(x_2^0)^2 - (x_3^0)^2 = 1$ ; в)  $\sigma'_{ij} =$   
 $= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma''_{ij} = 5\sigma_{ij}$ ; г) например, в базисе  $e_1 =$   
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 + e_3)$ ,  $e_2 = e_2$ ,  $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-e_1 + e_3)$  тензор  $\sigma'_{ij}$  принимает

вид  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{2} \\ -2 & 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$  5.  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} l_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} l_2 \\ \frac{1}{2} l_1 & \frac{1}{2} l_2 & 0 \end{pmatrix}$  6. а)  $\varepsilon_{ij} =$   
 $= \begin{pmatrix} 8 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$ ,  $\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$ ; б)  $\varepsilon_1 = -10^{-6}$ ,  $\varepsilon_2 = 6 \cdot 10^{-6}$ ,  
 $\varepsilon_3 = 9 \cdot 10^{-6}$ ,  $e_1^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}} \right\}$ ,  $e_2^0 = e_2$ ,  $e_3^0 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}} \right\}$ ;  
 в)  $(1 - 16 \cdot 10^{-6}) \Delta y_1^2 + (1 - 12 \cdot 10^{-6}) \Delta y_2 + 24 \cdot 10^{-6} \Delta y_1 \Delta y_3 = \rho^2$ ,  
 $\frac{(\Delta y_1^0)^2}{(1 - 10^{-6})^2} + \frac{(\Delta y_2^0)^2}{(1 + 6 \cdot 10^{-6})^2} + \frac{(\Delta y_3^0)^2}{(1 + 9 \cdot 10^{-6})^2} = \rho^2$ ; г)  $\omega = \{0, 2, 1\} \cdot 10^{-6}$ ,  
 $\omega = \sqrt{5} \cdot 10^{-6}$ . 7.  $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ ,  $e'_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ .

**§ 4. 1.** а)  $\mu = 72,6 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ ; б)  $\alpha = 24,2 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ . 2. а)  $d_{113} =$   
 $= d_{123} = d_{213} = d_{223} = d_{311} = d_{312} = d_{332} = d_{333} = 0$  (плоскость сим-  
 метрии  $x_3 = 0$ ); б)  $d_{133} = d_{233} = d_{331} = d_{332} = d_{312} = 0$ ,  $d_{311} = d_{322}$ ,  
 $d_{223} = d_{113}$ ,  $d_{231} = -d_{123}$ ,  $d_{122} = d_{212} = -d_{111}$ ,  $d_{211} = d_{112} = -d_{222}$   
 (ось симметрии  $Ox_3$ ); в), г)  $d_{111} = d_{222} = d_{112} = d_{211} = d_{122} = d_{221} =$   
 $= 0$ ,  $d_{133} = d_{233} = d_{331} = d_{332} = d_{312} = 0$ ,  $d_{311} = d_{322}$ ,  $d_{223} = d_{113}$ ,  
 $d_{123} = -d_{231}$  (ось симметрии  $Ox_3$ ); д)  $d_{111} = d_{222} = d_{333}$ ,  $d_{112} =$   
 $= d_{223} = d_{331}$ ,  $d_{122} = d_{233} = d_{311}$ ,  $d_{211} = d_{322} = d_{133}$ ,  $d_{212} = d_{323} = d_{131}$ ,  
 $d_{123} = d_{231} = d_{312}$ . 3. а)  $d_{ijk} = 0$ ; б) отличны от нуля только компо-  
 ненты  $d_{123}$ ,  $d_{231}$ ,  $d_{312}$ . 4. а)  $x_3 [(d_{311} + 2d_{131}) x_1^2 + (d_{322} + 2d_{223}) x_2^2 +$   
 $+ d_{333} x_3^2 + 2(d_{123} + d_{231} + d_{312}) x_1 x_2] = 1$ ; б) 1)  $d_{111} x_1^3 + (d_{122} +$   
 $+ 2d_{212}) x_1 x_2^2 + (d_{133} + 2d_{331}) x_1 x_3^2 + d_{222} x_2^3 + (d_{211} + 2d_{112}) x_1^2 x_2 +$   
 $+ (d_{233} + 2d_{323}) x_2 x_3^2 = 1$ , 2)  $(d_{311} + 2d_{113}) x_3 (x_1^2 + x_2^2) + d_{111} (x_1^3 -$   
 $- 3x_1 x_2^2) + d_{222} (x_2^3 - 3x_2 x_1^2) = 1$ , 3), 4)  $(d_{311} + 2d_{113}) x_3 (x_1^2 + x_2^2) = 1$ ,  
 5)  $d_{111} (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (d_{122} + 2d_{212}) (x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1^2) + (d_{211} +$   
 $+ 2d_{112}) (x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) + 6d_{123} x_1 x_2 x_3 = 1$ ; в) 2)  $2(d_{123} + d_{212} +$   
 $+ d_{312}) x_1 x_2 x_3 = 1$ . 5. а)  $c_{3323} = c_{3331} = c_{3312} = c_{1112} = c_{2212} = c_{2331} = 0$ ,  
 $c_{1111} = c_{2222}$ ,  $c_{1133} = c_{2233}$ ,  $c_{2323} = c_{3131}$ ,  $c_{1123} = c_{3112} = -c_{2223}$ ,  $c_{2231} =$   
 $= c_{3312} = -c_{1131}$ ,  $c_{1212} = \frac{1}{2} (c_{1111} - c_{1122})$ ; б)  $c_{1123} = c_{2223} = c_{3323} =$   
 $= c_{1131} = c_{2231} = c_{3331} = c_{3331} = c_{3312} = c_{2312} = c_{3112} = 0$ ,  $c_{1111} = c_{2222}$ ,  
 $c_{1133} = c_{2233}$ ,  $c_{2323} = c_{3131}$ ,  $c_{1112} = -c_{2212}$ ; в)  $c_{1123} = c_{2223} = c_{3323} =$   
 $= c_{1131} = c_{2231} = c_{3331} = c_{2331} = c_{1112} = c_{2212} = c_{3312} = c_{2312} = c_{3112} = 0$ ,  
 $c_{1111} = c_{2222}$ ,  $c_{1133} = c_{2233}$ ,  $c_{2323} = c_{3131}$ ,  $c_{1212} = \frac{1}{2} (c_{1111} - c_{1122})$ ; г)  $c_{1111} =$

$= c_{2222} = c_{3333}, c_{1112} = c_{2223} = c_{3331}, c_{1222} = c_{2333} = c_{3111}, c_{1122} = c_{2233} =$   
 $= c_{3311}, c_{1123} = c_{2231} = c_{3312}, c_{1212} = c_{3323} = c_{3131}, c_{1223} = c_{2331} = c_{3112}$   
 (ось симметрии совпадает с  $Ox_3$ ). 6. а)  $c_{1123} = c_{2223} = c_{3323} = c_{1131} =$   
 $= c_{2231} = c_{3331} = c_{2331} = c_{1112} = c_{2212} = c_{3312} = c_{3112} = 0, c_{1111} =$   
 $= c_{2222} = c_{3333}, c_{1122} = c_{2233} = c_{3311}, c_{2323} = c_{3131} = c_{1212}, б) c_{1123} =$   
 $= c_{2223} = c_{3323} = c_{1131} = c_{2231} = c_{3331} = c_{1112} = c_{2212} = c_{3312} =$   
 $= c_{2312} = c_{3112} = 0$  (оси симметрии совпадают с осями координат).

## Глава VII

**§ 1. 1.** а) Минимум  $x_3 = -3(a^2 + b^2 - ab)$  при  $x_1 = 2a - b$ ,  
 $x_2 = 2b - a$ . б) Минимум при  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$  и  $x_3 = -\sqrt{2}$ ,  
 $x_2 = \sqrt{2}$ . в) Если  $a > b$ , то максимум при  $x_1 = \pm 1, x_2 = 0$ ; если  
 $a < b$ , то максимум при  $x_1 = 0, x_2 = \pm 1$ ; если  $a = b$ , то максимум  
 при  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ . г) Минимум при  $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{3}$  или  $x_1 = x_2 = \frac{2\pi}{3}$ .  
 Максимум  $u = 1$ . д) Максимум при  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . е) Мини-  
 мум при  $x_1 = x_2 = x_3$ . ж) Максимум при  $x_1 = \frac{a}{m}, x_2 = \frac{b}{m}, x_3 = \frac{c}{m}$ ,  
 где  $m = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$ . 4. а) Показать непосредственным вычи-  
 слением, что градиент модуля вектора  $r_{OM}$ , соединяющего начало  $O$   
 с переменной точкой  $M$ , равен  $\frac{r_{OM}}{|r_{OM}|}$  (см. упр. 3а). Далее пока-  
 зать, что для эллипса  $\text{grad}(r_{F_1M} + r_{F_2M})$  направлен по нормали к  
 эллипсу в точке  $M$ , и записать условие перпендикулярности этого век-  
 тора к орту касательной в точке  $M$ . б) Решение аналогично а).  
 5.  $\text{div } v = 0, \text{rot } v = 2\omega; \text{div } w = -2\omega^2, \text{rot } w = 2a + \omega^2$ . 10. д)  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right) =$   
 $= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 3r^2}{2^5} = 0$ .

**§ 3. 2.** а)  $x_1 = u_1 \cos u_2, x_2 = u_1 \sin u_2, \Delta = u_1$ ; однозначность  
 нарушается в начале координат; координатные линии — концентри-  
 ческие окружности с центром в точке  $O$  и лучи, выходящие из  $O$ .  
 б)  $x_1 = au_1 \cos u_2, x_2 = bu_1 \sin u_2, \Delta = abu_1$ ; однозначность нару-  
 шается в начале координат; координатные линии — софокусные (т. е.  
 имеющие общие фокусы) эллипсы с центром в  $O$  и лучи, выходя-  
 щие из  $O$ . в)  $x_1 = \text{ch } u_1 \cos u_2, x_2 = \text{sh } u_1 \sin u_2, \Delta = \text{sh}^2 u_1 + \sin^2 u_2$ ;  
 однозначность нарушается при  $u_1 = 0, u_2 = \pi k$ , т. е. в точках  $(1, 0)$   
 и  $(-1, 0)$ ; координатные линии — софокусные эллипсы и гиперболы.  
 г)  $x_1 = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2), x_2 = u_1 u_2, \Delta = u_1^2 + u_2^2$ ; однозначность нару-  
 шается в начале координат; координатные линии — два ортогональ-

ных семейства парабол. д)  $x_1 = \frac{\text{sh } u_1}{\text{ch } u_1 + \cos u_2}$ ,  $x_2 = \frac{\sin u_2}{\text{ch } u_1 + \cos u_2}$ ,

$\Delta = \frac{1}{(\text{ch } u_1 + \cos u_2)^2}$ ; координатные линии  $u_2 = \text{const}$  — дуги окруж-

ностей  $x_1^2 + (x_1 - \text{ctg } u_2)^2 = \frac{1}{\sin^2 u_2}$ , проходящих через точки  $x_1 = \pm 1$ ,

$x_2 = 0$ ;  $u_1 = \text{const}$  — ортогональные к ним окружности  $(x_1 - \text{cth } u_1)^2 +$

$+ x_2^2 = \frac{1}{\text{sh}^2 u_1}$ . 3. а)  $u_1 = \text{const}$  — эллиптические цилиндры с осью

$Ox_3$ ;  $u_2 = \text{const}$  — полуплоскости, ограниченные осью  $Ox_3$ ;

$u_3 = \text{const}$  — плоскости, параллельные  $x_1 Ox_2$ ; линии  $u_1$  — полупря-

мые, выходящие из точек оси  $Ox_3$ ; линии  $u_2$  — эллипсы с центром

на оси  $Ox_3$ ; линии  $u_3$  — прямые, параллельные оси  $Ox_3$ ;  $\Delta = abu_1$ ;

однозначность нарушается в точках оси  $Ox_3$ . б)  $u_1 = \text{const}$  — эллип-

соиды с центром в  $O$  и осями  $Ox_i$ ;  $u_2 = \text{const}$  — конусы с верши-

ной в  $O$ ;  $u_3 = \text{const}$  — полуплоскости, ограниченные осью  $Ox_3$ ;

линии  $u_1$  — лучи, выходящие из начала координат; линии  $u_2$  —

половины эллипсов, соединяющих пары точек оси  $Ox_3$ ; линии  $u_3$  —

эллипсы с центром на оси  $Ox_3$ ;  $\Delta = abcu_1^2 \sin u_2$ , однозначность

нарушается в точках оси  $Ox_3$ . в)  $u_1 = \text{const}$  — эллипсоиды,

$u_2 = \text{const}$  — однополостные гиперboloиды,  $u_3 = \text{const}$  — двуплос-

тостные гиперboloиды; все эти координатные поверхности принадлежат

к софокусному семейству  $\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} = 1$ ; линии  $u_1, u_2,$

$u_3$  — пространственные кривые четвертого порядка, состоящие из

двух частей;  $\Delta = 0$ . г)  $u_1 = \text{const}$ ,  $u_2 = \text{const}$  — параболоиды;

$u_3 = \text{const}$  — плоскости, проходящие через ось  $Ox_3$ ; линии  $u_1$  и  $u_2$  —

параболы; линия  $u_3$  — пространственная кривая четвертого порядка;

$\Delta = u_1 u_2 (u_1^2 + u_2^2)$ , однозначность нарушается на оси  $Ox_3$ . д)  $u_1 = \text{const}$  — софокусные эллипсоиды вращения,  $u_2 = \text{const}$  —

двухполостные или однополостные (в зависимости от того, вытя-

нуты или сплюснуты эллипсоиды  $u_1 = \text{const}$ ) гиперboloиды,

$u_3 = \text{const}$  — плоскости, проходящие через ось  $Ox_3$ . Координатные

линии  $u_1$  и  $u_2$  — эллипсы и гиперболы, линии  $u_3$  — пространствен-

ные кривые четвертого порядка;  $\Delta = \text{sh } u_1 \sin u_2$  для вытянутых и

$\Delta = \text{ch } u_1 \sin u_2$  для сплюснутых эллипсоидов  $u_1 = \text{const}$ ; одно-

значность нарушается в точках оси  $Ox_3$ . е)  $u_1 = \text{const}$  — торы

$(r - \text{cth } u_1)^2 + x_3^2 = \frac{1}{\text{sh}^2 u_1}$ , где  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ;  $u_2 = \text{const}$  — сферы

$(x_3 - \text{ctg } \beta)^2 + r^2 = \frac{1}{\sin^2 u_2}$ ;  $u_3 = \text{const}$  — плоскости; линии  $u_1$  и  $u_3$  —

окружности, линии  $u_2$  — пространственные кривые четвертого

порядка;  $\Delta = \frac{\text{sh } u_1}{(\text{ch } u_1 - \cos u_2)^3}$ , однозначность нарушается в точках

оси  $Ox_3$ . 4. Все, кроме 2б), 3а), б).

§ 4. 1. Величины  $\omega_i, ds^2, \Gamma_{ijk}, \omega_{ij}$  определяются по формулам

(2), (4), (11), (6), для вычисления по которым достаточно знать

коэффициенты Ламе  $h_i$ . Дадим  $h_i$  для задач 2в) — д), 3 в) — е).

Задача 2в):  $h_1 = h_2 = \sqrt{\cos^2 u_2 + \text{ch}^2 u_1}$ . Задача 2г):  $h_1 = h_2 =$

$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ . Задача 2д):  $h_1 = h_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} u_1 + \cos u_2}$ . Задача 3в):

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \frac{1}{4} \frac{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)}{(a_1 - u_1)(a_2 - u_1)(a_3 - u_1)}, \\ h_2^2 &= \frac{1}{4} \frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_2)}{(a_1 - u_2)(a_2 - u_2)(a_3 - u_2)}, \\ h_3^2 &= \frac{1}{4} \frac{(u_1 - u_3)(u_2 - u_3)}{(a_1 - u_3)(a_2 - u_3)(a_3 - u_3)}. \end{aligned}$$

Задача 3г):  $h_1 = h_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ ,  $h_3 = u_1 u_2$ . Задача 3д):  $h_1 = h_2 = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u_1 + \sin^2 u_2}$ ,  $h_3 = \operatorname{sh} u_1 \sin u_2$  для вытянутого и  $h_1 = h_2 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u_2 - \sin^2 u_2}$ ,  $h_3 = \operatorname{ch} u_1 \sin u_2$  для сплюснутого эллипсоида.

Задача 3е):  $h_1 = h_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}$ ,  $h_3 = \frac{\operatorname{sh} u_1}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}$ .

$$3. \gamma_{\alpha'\alpha} = \frac{h_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_\alpha}, \quad 4. \gamma_{\alpha'\beta\gamma} = \frac{1}{h_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_\gamma} \left( \frac{h_\beta}{h_\alpha} \right) \frac{\partial u_\beta}{\partial u_\alpha} + \frac{h_\beta}{h_\alpha} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial u_\alpha \partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial u_\gamma} \right\}.$$

§ 5. 1. Использовать результат задачи 1 к § 4 и формулы (1), (3), (8'), (9'), (10) этого параграфа. 5.  $\varphi = -\frac{k \cos u_2}{r^2}$ . 6.  $\varphi = A + \frac{B}{u_1}$ ,

$\varphi = A + B \ln \operatorname{tg} \frac{u_2}{2}$ ,  $\varphi = A + B u_3$ , где  $A$  и  $B$  — постоянные величины.

$$\begin{aligned} 7. \text{ а) } a_{ij,\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_\alpha} - a_{kj} \Gamma_{ik\alpha} - a_{ik} \Gamma_{jk\alpha}, \quad a_{ij,j} = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{h_j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_j} - a_{kj} \Gamma_{ikj} - \right. \\ &\quad \left. - a_{ik} \Gamma_{jkj} \right), \quad a_{ji,j} = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{h_j} \frac{\partial a_{ji}}{\partial u_j} - a_{ki} \Gamma_{jkj} - a_{jk} \Gamma_{ikj} \right); \quad \text{ б) } \delta_{ij,k} = 0, \\ (x_i y_i)_\alpha &= \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial (x_i y_i)}{\partial u_\alpha}. \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович И. Г., Левин В. И., Уравнения математической физики, «Наука», 1964.
2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г., Краткий курс математического анализа, «Наука», 1966.
3. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1966.
4. Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии «Наука», 1967.
5. Ефимов Н. В., Квадратичные формы и матрицы, Физматгиз, 1962.
6. Моденов П. С., Аналитическая геометрия, Изд-во МГУ, 1955.
7. Пискунов Н. С., Дифференциальное и интегральное исчисления, Физматгиз, 1962.
8. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, Физматгиз, 1956.

### Литература по тензорному исчислению

9. Борисенко А. И., Тарапов И. Е., Векторный анализ и начала тензорного исчисления, «Высшая школа», 1966.
10. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, «Наука», 1965.
11. Мак-Коннел А. Дж., Введение в тензорный анализ, Физматгиз, 1963.
12. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», 1964.
13. Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, «Наука», 1965.
14. Широков П. А., Тензорное исчисление, Изд-во Казанского ун-та, 1961.

### Литература, связанная с приложениями тензорного исчисления

15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, 1965.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, «Наука», 1965.
17. Най Дж., Физические свойства кристаллов, ИЛ, 1960.
18. Прагер В., Введение в механику сплошных сред, ИЛ, 1963.
19. Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, Физматгиз, 1962.
20. Хамермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, «Мир», 1966.
21. Шубников А. В., Флинт Е. Е., Бокий Г. Б., Основы кристаллографии, Изд-во АН СССР, 1940.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Альтернирование тензора валентности  $p$  76  
 — двухвалентного 75  
 — формы билинейной 74  
 — полилинейной 76
- Базис пространства 16  
 — ортонормированный 19  
 — левый 19  
 — правый 19
- Валентность тензора 61  
 Вектор 8  
 — аксиальный 27  
 — изотропный 141  
 — напряженности тока 224  
 — нулевой 7  
 — плотности тока 224  
 — потока тепла 226, 269  
 — противоположный 7  
 — собственный гомотетии 135  
 — линейного преобразования 134  
 — поворота 135  
 — растяжения 135  
 — сдвига 135  
 — тождественного преобразования 135  
 — электрической индукции 230
- Векторы коллинеарные 12  
 — компланарные 12  
 — линейно зависимые 10  
 — независимые 11  
 — ортогональные 23
- Волчок асимметричный 213  
 — симметричный 218  
 — шаровой 218
- Вращение 127  
 — несобственное 129  
 — собственное 129
- Гамильтона — Кэли теорема 151  
 Гиперболоид двуполостный 107, 193  
 — однополостный 107, 192
- Гомотетия 85, 135  
 Градиент поля векторного 272  
 — скалярного 268, 310
- Группа 124  
 — коммутативная 130  
 — ортогональная 123  
 — полная линейная 124, 125  
 — симметрии 129
- Группа точечных преобразований 232  
 — унимодулярная 126  
 — циклическая 130
- Движения уравнение 286  
 Дефект линейного преобразования 99  
 — матрицы 100
- Деформация упругая 253  
 Дивергенция векторного поля в координатах декартовых прямоугольных 273  
 — криволинейных ортогональных 313  
 — сферических 315  
 — цилиндрических 314
- Дифференцирование поля векторного 272, 311  
 — скалярного 268  
 — тензорного 264
- Дифференциал абсолютный произведения тензоров 318  
 — свернутого 320  
 — суммы тензоров 318  
 — тензора свернутого 319  
 — тензорного поля в координатах прямоугольных 266  
 — криволинейных ортогональных 317
- Длина вектора 21, 23  
 Длины линейный элемент 307
- Жидкость вязкая 288  
 — идеальная 287
- Закон Кулона 269  
 — Ома обобщенный 225
- Значение собственное 134
- Инвариант 62  
 — дифференциальный 273
- Инварианты матрицы линейного преобразования плоскости 140  
 — пространства 139  
 — уравнения кривой второго порядка 181  
 — поверхности второго порядка 179
- Индекс суммирования 17
- Канонический вид квадратичной формы 166  
 Комбинация линейная векторов 10  
 Компоненты перемещения репера 302  
 — тензора 61



Компоненты тензора деформации сдвига-  
вые 424

- — напряжений нормальные 233
- — — сдвиговые 238

Конус второго порядка 48, 193

Координаты биполярные 296, 297

- вектора 16
- криволинейные 268
- — ортогональные 295
- параболические 296
- плоскости тангенциальные 45
- полярные 294
- — обобщенные 296
- прямоугольные декартовы 19
- сферические 293
- — обобщенные 296
- тензора 61
- тороидальные 297
- цилиндрические 292
- — обобщенные 296
- эллипсоидальные вырожденные 297
- — общие 296, 297

Коэффициент магнитной восприимчи-  
вости 231

- расширения объемного 245, 282
- теплопроводности 226, 269

Коэффициенты главные деформации 245

- — магнитной восприимчивости 231
- — — проницаемости 232
- — — теплового расширения 249
- — — теплопроводности 227
- — Ламе 259, 299

Кривая второго порядка 46

- — — распадающаяся 47
- — — центральная 47

Кристалл анизотропный 224

— изотропный 225

Кристоффеля символы 301

Критерий Сильвестра 167

Кулона закон 269

Ламе коэффициенты 259, 299

Лапласа оператор в координатах декар-  
товых прямоугольных 274

- — — криволинейных ортогональ-  
ных 314

- — — — сферических 315
- — — — цилиндрических 315
- — — уравнение 229, 275

Линии координатные 290

- — системы координат прямоугольной  
декартовой 291

- — — — сферической 294
- — — — цилиндрической 293

Линия узлов 40

Максимум функции 270

Матрица гомотетии 92

- диагональная 94
- единичная 91, 114
- идемпотентная 114
- инволютивная 118
- квадратная 33
- нулевая 92
- обратная 120, 153
- — произведению матриц 122
- ортогональная 34, 128
- — перехода от одного базиса к другому 34

Матрица поворота 93

- — преобразования линейного 90
- — проектирования 92

— сдвига 93

— сжатия 92

— симметричная 72

— формы билинейной 55

Минимум функции 270

Миноры главные квадратичной формы 167

Многочлен от матрицы 151

- — преобразования линейного 151

— — характеристический матрицы 138, 140

- — — преобразования линейного 139

Модуль сдвига 260

— сжатия всестороннего 260

— пьезоэлектрический 249

Момент импульса 221

— инерции главный 217

— — — относительно оси 217

— — — — координатной 216

— — — полярный 216

Направления главные квадратичной  
формы 166

- — — тензора деформации 245

— — — — напряжений 238

— — — — теплового расширения 249

— — — — теплопроводности 227

Напряжение 235

— — — главное 238

— — — — двуосное 239

— — — — одноосное 239

— — — — однородное 235

— — — — трехосное 239

Напряженность электрического поля 224,  
269

Неймана принцип 232

Неразрывности уравнение 284

Область значений преобразования 99

Ома закон обобщенный 225

Оператор Лапласа в координатах декар-  
товых прямоугольных 291

- — — — криволинейных ортогональ-  
ных 314

— — — — — сферических 315

— — — — — цилиндрических 314

— — — — — линейный 83

Определитель матрицы линейного пре-  
образования 96

— — — — — перехода от одного базиса к дру-  
гому 34

— — — — — ортогональной 34, 129

— — — — — произведения матриц 114

Орт 19

Ортогональность векторов 23

Оси главные инерции 217

— — — — — поверхности второго порядка 183

— — — — — симметрии порядка  $n$  232

Основная задача тензорного исчисления  
36

Перенос параллельный системы коорди-  
нат 42, 178

Пересечение подпространств 10

Перестановка индексов тензора 70

Перестановочность линейных преобразо-  
ваний 112

- Плоскость центров 204  
 Плотность тока 224  
 Поверхности координатные системы координат декартовой прямоугольной 291  
 — — — сферической 293  
 — — — цилиндрической 292  
 Поверхность второго порядка 47, 177  
 — — — центральная 48, 204  
 — — — цилиндрическая 184, 185  
 — изотермическая 230  
 — координатная 290  
 — напряжений 238  
 — характеристической гомотетии 79  
 — преобразования симметричного линейного 105  
 — — — тождественного 106  
 — — — тензора единичного 79  
 — — — двухвалентного симметричного 78, 104  
 — — — трехвалентного симметричного 80  
 Поворот осей координат 86, 177  
 — плоскости 93, 135, 140  
 — — гиперболический 117  
 — — эллиптический 117  
 — пространства 135  
 Подгруппа конечная 129  
 — ортогональных преобразований 126  
 — полной линейной группы 125  
 — собственных вращений 126  
 Подобие 159, 160  
 Подпространство 10, 18  
 — несобственное 10  
 Поле векторное 263  
 — — безвихревое 274  
 — — потенциальное 278  
 — — соленоидальное 274  
 — давлений 269  
 — скалярное 263  
 — температурное 268  
 — тензора 262  
 — — двухвалентного 264  
 — — нестационарное 275  
 — — одновалентного 263  
 — — однородное 263  
 — — стационарное 275  
 Полуинвариант 181  
 Поляризация диэлектрика 230  
 Порядок матрицы 33  
 Потенциал электрического поля 269  
 Преобразование координат вектора 37  
 — — тензора 63  
 — коэффициентов формы билинейной 57  
 — — — линейной 52  
 — — — полилинейной 63  
 — — линейной 83  
 — — антисимметричное 105  
 — — вырожденное 96  
 — — невырожденное 96  
 — — нулевое 25, 91  
 — — обратное 120  
 — — — произведению преобразований 122  
 — — ортогональное 126  
 — — поворота 86  
 — — сдвига 86  
 — — симметричное 103  
 — — сопряженное 103  
 — — — повороту 108  
 Преобразование линейное, сопряженное произведению преобразований 114  
 — — — сдвигу 108  
 — — — тождественное 84, 91, 135  
 Преобразования перестановочные 112  
 Признак тензорный обратный 69  
 Принцип Неймана 232  
 Проектирование вектора на плоскость 98  
 — — — ось 98  
 Проекция вектора на вектор 22  
 Произведение векторов векторное 25, 39  
 — — — двойное 28  
 — — — скалярное 19, 22, 38  
 — — — смешанное 28, 39  
 — — линейного преобразования на число 101  
 — — линейных преобразований 111  
 — — матриц 113  
 — — тензора на число 65  
 — — тензоров 66  
 Производная абсолютная векторного поля 312  
 — — тензорного поля 266, 317  
 — — ковариантная скалярного поля 309  
 Проницаемость главная диэлектрическая 231  
 Пространство векторное 8  
 — евклидово 22  
 — линейное 8  
 Прямая центров 204  
 Разложение тензора по формуле Тейлора 267  
 — — формы на симметричную и антисимметричную части 74  
 Размерность пространства 14  
 Ранг линейного преобразования 99  
 — — матрицы 96  
 Расстояние между двумя точками 43  
 — — от точки до плоскости 45  
 Растяжение однородное 85  
 — — плоскости в данном направлении 85, 135  
 Расширение тепловое 248  
 Репер подвижной 298  
 Ротор векторного поля 273, 282  
 — — — в координатах декартовых прямоугольных 273  
 — — — — криволинейных ортогональных 314  
 — — — — — сферических 315  
 — — — — — цилиндрических 315  
 Свертывание произведения тензоров 68, 113  
 — — тензора 68  
 Сдвиг плоскости 86, 108, 135, 141  
 Семиинварианты 181  
 Сжатие гидростатическое 239  
 — — косое 87  
 — — однородное 85  
 Сила объемная 235  
 Сильвестра критерий 167  
 Символ Кристоффеля 301  
 — — Кронекера антисимметричный 20  
 — — — симметричный 20  
 Симметрирование тензора валентности  $p$  76  
 — — — двухвалентного 75

- Симметрирование формы билинейной 74  
 — — полилинейной 76  
 Система координат биполярная 296, 297  
 — — декартова прямоугольная 291  
 — — криволинейная 298  
 — — ортогональная 295  
 — — параболическая 296  
 — — полярная 296  
 — — — обобщенная 296  
 — — сферическая 293  
 — — — обобщенная 296  
 — — тороидальная 297  
 — — цилиндрическая 291  
 — — — обобщенная 296  
 — — эллипсоидальная вырожденная 297  
 — — эллиптическая 296, 297  
 — — гексагональная 233  
 — — кристаллографическая 233  
 — — кубическая 233  
 — — моноклиная 233  
 — — ромбическая 233  
 — — тетрагональная 233  
 — — тригональная 233  
 — — триклинная 233  
 След тензора 68  
 Сложение преобразований линейных 101  
 — тензоров 65  
 Соглашение о суммировании 17  
 Состояние напряженное линейное 239  
 — — объемное 239  
 — — плоскостное 239  
 Стационарности условие 270  
 Степень формы 58  
 Сумма подпространств 10  
 — преобразований линейных 101  
 — тензоров 65  
 Суммирование 17  
 Тейлора формула для тензорного поля 267  
 Тензор антисимметричный 74  
 — — по 2 индексам 73  
 — — двухвалентный антисимметричный 73  
 — — симметричный 71  
 — деформации 243  
 — дискриминантный 26, 62  
 — диэлектрической проницаемости 231  
 — единичный 62  
 — инерции 215  
 — магнитной восприимчивости 231  
 — — проницаемости 231  
 — — материальный 247  
 — — модулей податливости 253  
 — — пьезоэлектрических 249  
 — — упругости 253  
 — напряжений 235, 285  
 — вязкий 288  
 — — гидростатического сжатия 239  
 — — чистого сдвига 239  
 — нулевой 62  
 — — валентности 62  
 — обратный 121  
 — ортогональный 61  
 — полевой 247  
 — поля 262  
 — поляризуемости 230  
 — симметричный 73  
 — — по 2 индексам 72  
 — скоростей деформации 281  
 Тензор теплового расширения 249  
 — теплового сопротивления 226  
 — теплопроводности 226  
 — удельного электрического сопротивления 234  
 — удельной электропроводности 225  
 — шаровой 107, 226  
 Тензорный признак 69  
 Тензоры равные 62  
 Теорема Гамильтона — Кэли 151  
 — об умножении определителей 115  
 — Штейнера 220  
 Теплопроводности коэффициент 226  
 — — главный 227  
 Точка стационарности 270  
 Транспонирование матрицы 103  
 Углы Эйлера 40  
 Угол между векторами 21, 23  
 — наклоны 40  
 Умножение матриц 113  
 — определителей 115  
 — преобразований линейных 111  
 — преобразования линейного, на число 101  
 — тензора на число 65  
 — тензоров 66  
 Уравнение вековое линейного преобразования 137  
 — движения 286  
 — каноническое гиперболоида двуплоскостного 193  
 — — — одноплоскостного 192  
 — — гиперболы 196  
 — — конуса второго порядка 193  
 — — — — — мнимого 193  
 — — параболоида гиперболического 193  
 — — — эллиптического 193  
 — — параболы 196  
 — — плоскостей параллельных 195  
 — — — — — мнимых 195  
 — — — — — пересекающихся 194  
 — — — — — мнимых 195  
 — — — — — совпадающих 195  
 — — прямых параллельных 196  
 — — — — — мнимых 196  
 — — — — — пересекающихся 196  
 — — — — — мнимых 196  
 — — — — — совпадающих 196  
 — — эллипса 196  
 — — — — — мнимого 196  
 — — эллипсоида 192  
 — — — — — мнимого 192  
 — — цилиндра гиперболического 194  
 — — — — — параболического 194  
 — — — — — эллиптического 194  
 — — — — — мнимого 194  
 — кривой второго порядка 46  
 — Лапласа 229, 275  
 — неразрывности 284  
 — перемещения репера 302  
 — плоскости 44  
 — поверхности второго порядка 47, 177  
 — прямой в пространстве 46  
 — характеристическое линейного преобразования 137  
 Уравнения инфинитезимального перемещения 302

Уравнения простейшие кривых второго  
  порядка 186  
— — поверхностей второго порядка 186  
Условия достаточные экстремума 271

Форма билинейная 54  
— — антисимметричная 73, 105  
— — полярная для квадратичной 77  
— — симметричная 71, 103  
— квадратичная 76, 104, 165  
— — определенная отрицательно 167  
— — — положительно 167  
— кубическая 78  
— линейная 52  
— — дифференциальная 300  
— полилинейная 58  
— — антисимметричная 73  
— — — по 2 аргументам 73  
— — симметричная 73  
— — — по 2 аргументам 72  
Формула Тейлора для тензорного поля  
  267  
Функция векторного аргумента вектор-  
  ная 83  
— — — — линейная 83  
— — — — скалярная 51

Функция векторного аргумента скалярная  
  линейная 51  
— гармоническая 275  
— полилинейная 58

Центр кривой второго порядка 48  
— поверхности второго порядка 48, 201  
Центров плоскости 204  
— прямая 204

Штейнера теорема 220

Экстремум функции 271  
Электропроводность удельная 226  
Элемент длины 300  
Эллипсоид 107, 192  
— деформации 246  
— инерции 218  
— мнимый 107, 192  
— теплопроводности 227  
Энергия кинетическая 215  
Эффект пьезоэлектрический обратный  
  249  
— — прямой 249

Ядро линейного преобразования 99

*Макс Айзикович Акивис,  
Владислав Викторович Гольдберг*

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(Серия: «Избранные главы высшей математики  
для инженеров и студентов втузов»)

М., 1969 г., 352 стр. с илл.

Редакторы *В. А. Гаухман, И. Е. Морозова*  
Техн. редактор *Л. А. Пыжова*  
Корректор *Л. С. Сомова*

---

Сдано в набор 14/IV 1969 г. Подписано к печати 5/IX 1969 г. Бумага  $84 \times 108^{1/32}$ . Физ. печ. л. 11. Условн. печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 17,34. Тираж 40 000 экз. Т-13210. Цена книги 71 коп. Заказ № 514. Издательство «Наука».

---

Главная редакция  
физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

71 к.